OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

LA MÉTHODE DANS LA MÉCANIQUE DES QUANTA
Paris : Hermann 1935.

ESSAI SUR L'INCOMPRÉHENSION MATHÉMATIQUE
avec une préface de G. Bouligand
Paris : Vuibert 1940.

HISTOIRE DE LA MÉCANIQUE
avec une préface de Louis de Broglie
Neuchâtel : Le Griffon 1950.
(Ouvrage couronné par l'Académie des sciences)

LA MÉCANIQUE AU XVIIe SIÈCLE
DES ANTÉCÉDENTS SCOLASTIQUES A LA PENSÉE CLASSIQUE
avec une préface de Louis de Broglie
Neuchâtel : Le Griffon 1954.
(Ouvrage couronné par l'Académie des sciences)

BIBLIOTHÈQUE SCIENTIFIQUE
33

LA THÉORIE PHYSIQUE AU SENS DE BOLTZMANN

ET SES PROLONGEMENTS MODERNES

PAR
RENÉ DUGAS

PRÉFACE DE LOUIS DE BROGLIE

ÉDITIONS DU GRIFFON NEUCHATEL-SUISSE
DISTRIBUTION DUNOD PARIS

EDITÉ EN SUISSE

Cet ouvrage a pu être publié grâce à la collaboration de M. Raymond JANCEL, docteur ès sciences, chargé de recherches au Centre national de la Recherche scientifique, qui a bien voulu revoir le manuscrit laissé par l'auteur et corriger les épreuves.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction réservés pour tous pays
© 1959 by Editions du Griffon, Neuchâtel (Suisse)
Imprimé en Suisse

Préface

Tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des Sciences et aux conclusions générales ou philosophiques qui peuvent découler de son étude ont appris avec une très grande tristesse au cours de l'été de 1957 la mort de M. René Dugas, enlevé rapidement par un mal implacable.

Un grand nombre de ceux qui le connaissaient ne voyaient sans doute en lui que l'ancien polytechnicien devenu par sa science et ses mérites directeur adjoint de la Société Nationale des Chemins de fer et chargé d'un enseignement de Mécanique à l'Ecole polytechnique : ils ignoraient qu'il était aussi en France un des maîtres de l'histoire des Sciences. Des connaissances scientifiques extrêmement solides et étendues dans tous les domaines des Mathématiques, de la Mécanique et de la Physique, une très vaste érudition jointe à une non moins vaste culture qui lui permettait de lire et d'interpréter exactement tous les textes écrits en grec, en latin ou en langue étrangère, un esprit critique très fin et très pénétrant qui le mettait à même d'analyser toutes les tendances et toutes les nuances, telles étaient les qualités essentielles qui ont permis à René Dugas d'être un grand historien des Sciences.

Dans ce domaine de l'histoire des Sciences, il avait commencé par « se faire la main » en publiant notamment dans la Revue scientifique, *toute une série de courtes études à la fois érudites et profondes sur certains points particuliers de l'histoire de la Mécanique. Un petit fascicule consacré à la* Méthode dans la Mécanique des Quanta, *une étude critique intitulée* Essai sur l'incompréhension en Mathématiques *avaient montré qu'il connaissait bien les formes les plus récentes de la Mécanique et qu'il savait analyser avec la finesse d'un psychologue les difficultés que certains esprits éprouvent à comprendre exactement la portée des démonstrations mathématiques. Mais c'est seulement depuis une dizaine d'années qu'il avait commencé à donner toute la mesure de son talent d'historien des Sciences par la publication d'importants ouvrages qui resteront parmi les plus remarquables qu'ait produits dans ce domaine la pensée française contemporaine.*

Son Histoire de la Mécanique, *son livre sur la* Mécanique au XVIIe siècle *sont par la richesse de la documentation et par l'importance des commentaires des œuvres maîtresses qui seront longtemps consultées avec fruit. Dans les préfaces que j'ai naguère écrites pour ces ouvrages, j'ai analysé leur contenu et cherché à mettre en lumière leur exceptionnelle valeur : je n'y reviendrai pas ici.*

Mais, en nous quittant, René Dugas a laissé un manuscrit presque entièrement mis au point qui, pieusement recueilli par Mme René Dugas, relu et complété sur des points de détail par des jeunes savants de haute valeur, est édité dans le présent volume. Sa lecture est particulièrement captivante et achèvera de prouver que Dugas, en s'appuyant scrupuleusement sur les textes eux-mêmes, sut toujours être un des plus fins analystes du cheminement de la pensée scientifique.

L'ouvrage est consacré à la Théorie physique au sens de Boltzmann et ses prolongements modernes. *M. Dugas avait été très frappé par l'originalité de l'œuvre de Boltzmann et par l'énergie qu'il avait montrée en soutenant pendant toute sa jeunesse et sa maturité le point de vue des atomistes et l'utilité pour la physique théorique d'employer des images et de se représenter des structures : il s'était trouvé ainsi en violente contradiction avec les représentants de l'école énergétiste qui, à cette époque, faisait la loi dans presque tous les pays et en particulier en Allemagne et qui, adoptant un point de vue positiviste et une présentation abstraite et formelle des théories physiques, prétendait interdire aux chercheurs toute représentation des éléments non directement observables de la matière et couvrait d'anathèmes et parfois de sarcasmes les efforts de Boltzmann et de ses rares imitateurs. Cependant ceux-ci devaient sortir finalement vainqueurs de la lutte ; la fécondité des théories atomiques, la preuve expérimentale de l'existence des structures qu'elles invoquent devaient, dans les premières années du XXe siècle, obliger les tenants de l'Energétique, dont les théories purement formelles se montraient de plus en plus stériles, à s'incliner et à s'avouer vaincus. Mais il n'avait pas fallu moins d'environ un demi-siècle pour en arriver là.*

Dugas appréciait vivement le courage et la persévérance qui avaient été nécessaires à Boltzmann pour mener à bien une œuvre aussi généralement et aussi vivement critiquée que la sienne. Il avait été également frappé, ainsi qu'il le dit dans l'introduction que l'on trouvera plus loin, par l'analogie de la situation où se trouvait Boltzmann à la fin du siècle dernier et celle où se trouvent aujourd'hui les rares physiciens théoriciens qui, réagissant contre l'interprétation positiviste et purement formelle considérée comme orthodoxe par la Mécanique quantique actuelle et cherchant à revenir aux intuitions physiques qui avaient servi de bases aux premiers développements de la Mécanique ondulatoire, tentent de réintroduire les images et les

structures dans l'interprétation de la Physique quantique. De cette analogie de situation qui, dans ces dernières années, pour des raisons que j'ai expliquées ailleurs, avait souvent attiré mon attention, nous avions plusieurs fois parlé, M. Dugas et moi, et c'est ainsi qu'il avait eu l'occasion de me mettre au courant du travail qu'il avait entrepris sur l'œuvre de Boltzmann.

Je n'ai pas la prétention de résumer en quelques lignes l'ouvrage si riche en documentation et si dense en analyses approfondies que René Dugas laisse derrière lui : je voudrais seulement en donner un aperçu très général. La première partie intitulée La théorie physique au sens de Boltzmann *débute par un examen approfondi des idées de Boltzmann sur les principes de la Mécanique et sur la façon de les présenter. A l'époque où écrivait Boltzmann ces principes étaient dans leurs grandes lignes bien établis, mais la manière de les énoncer et d'en faire un exposé cohérent donnait lieu à de très nombreuses discussions où l'on voyait se dessiner des tendances d'esprit très différentes. Tous partaient évidemment des faits expérimentaux, mais sur cette base indispensable ils élevaient, suivant leur orientation de pensée, des édifices très différemment bâtis. Les uns pour traduire les faits concrets construisaient dans leur esprit des images, images abstraites et schématiques évidemment comme tout ce qui est scientifique, mais cependant intuitives et créées par l'imagination, et avec leur aide développaient des théories déductives leur permettant d'interpréter et de prévoir les phénomènes mécaniques et ils voyaient dans l'emploi alterné de l'induction imaginative et de la déduction logique le meilleur des leviers que nous puissions employer pour tenter de soulever le lourd voile qui nous cache la nature réelle des choses. D'autres, plus amateurs de formalismes rigoureux, cherchaient à extraire des faits expérimentaux une série de concepts et postulats ne faisant aucun appel à l'imagination et fixés une fois pour toutes et à en déduire d'une façon rigoureuse toutes les conséquences possibles. Et déjà apparaissait ainsi sur le terrain limité de la Mécanique l'opposition de tendance qui, dans le domaine plus vaste de la Physique générale, allait bientôt dresser l'une contre l'autre l'école des atomistes et l'école des énergétistes et qui, après le succès de l'atomisme, devait renaître sous une forme nouvelle dans la Physique quantique contemporaine.*

Sans aucun doute, Boltzmann appartenait à la première école et il fut presque seul dans l'Europe de son temps, en particulier dans les pays de langue allemande, à soutenir les conceptions de l'atomisme et à développer, notamment dans sa célèbre Théorie cinétique des gaz, l'image moléculaire de la structure de la matière : il ne devait pas vivre assez pour voir triompher le point de vue qu'il soutenait. Cependant, esprit pondéré et chercheur consciencieux, il savait reconnaître les mérites de ses adversaires et même éviter de pousser à l'extrême les points de vue qu'il soutenait. M. Dugas remarque qu'il était parvenu à cheminer par la méthode inductive entre

deux écueils : l'illusion phénoménologique (de certains énergétistes) de pouvoir bâtir la science sans le recours d'images abstraites et l'adoption inconsciente (par certains atomistes) d'une foule de représentations qui ne pourraient fournir l'ombre de véritables démonstrations. Il admettait volontiers que les chercheurs, tels que lui-même, qui ont une prédilection marquée pour le « manteau bigarré » des hypothèses mécanistes doivent accepter de renoncer à connaître le véritable mécanisme sous-jacent des phénomènes et de considérer les modèles qu'ils conçoivent comme de simples images ou de simples analogies sans prétendre traduire exactement ainsi les voies de la nature. Mais cette largeur d'esprit et cette modération ne l'empêchaient pas, nous le verrons, de maintenir très fermement son point de vue et, parce qu'il apercevait une certaine parenté entre les opinions de ses adversaires et le solipsisme ou l'idéalisme à la Berkeley qui nie l'existence du monde extérieur, de rejeter vigoureusement, en les qualifiant même de « lubies », ces attitudes philosophiques.

A l'aide de citations judicieusement choisies toujours accompagnées de pénétrants commentaires, Dugas nous montre Boltzmann exposant sous des formes diverses les principes de la Mécanique. Bien que l'illustre physicien ait toujours rendu hommage à la clarté des exposés axiomatiques de Kirchhoff, de Mach et de Hertz et qu'il ait même parfois dans ses enseignements suivi une route analogue, il ne cachait cependant pas sa préférence pour les méthodes qui partent d'images précises et intuitives comme celles de particules en mouvement. Comparant les notions employées par la présentation « énergétique » de la Mécanique à celle qu'emploie la présentation classique, il dit que les premières doivent être développées d'une façon claire et exempte de contradictions soit par la méthode déductive, soit par la méthode inductive, mais ajoute-t-il, des règles tout à fait précises devraient être données pour appliquer ces images d'une façon univoque à tous les cas particuliers sans supposer la connaissance de l'ancienne Mécanique. C'est là une remarque d'une grande profondeur et une remarque analogue pourrait aujourd'hui être faite à l'égard de bien des modes d'exposition actuels de la Mécanique quantique.

Après cette étude approfondie de l'attitude de Boltzmann vis-à-vis des principes de la mécanique, Dugas passe à la question plus générale de son attitude vis-à-vis des théories physiques. Bien que Boltzmann, qui, nous dit Dugas, était surtout un chercheur, ait reproché aux esprits de son temps de trop sacrifier à la critique des méthodes et des principes, il savait lui-même faire, et avec beaucoup de finesse, d'excellente critique de ce genre et le lecteur lira avec beaucoup d'intérêt et de profit ce qu'il a écrit sur les théories physiques de son temps et notamment sur l'Electromagnétisme et la Thermodynamique. Je soulignerai notamment le passage dans lequel, un peu en avance sur son époque, il annonçait qu'un jour viendrait où au lieu

de chercher à réduire, comme on le faisait alors, l'électromagnétisme à la mécanique, on tenterait au contraire de ramener la mécanique à l'électromagnétisme. Et je citerai la phrase où, après avoir parlé de la découverte des électrons, il ajoutait la conclusion encore bien exacte aujourd'hui : « On voit donc que la vieille antinomie kantienne, l'opposition entre la divisibilité à l'infini de la matière et la structure atomique de celle-ci, tient encore la Science en haleine. »

Naturellement, ce qui le frappait le plus dans la Physique théorique de son temps, c'était la suprématie intransigeante des énergétistes sur les atomistes. Il définissait de la façon suivante, la position des énergétistes : « Ils pensaient que l'hypothèse moléculaire avait été utile parce que les équations dont les phénoménologues font aujourd'hui la substance même de la Physique avaient toutes été obtenues à l'aide des hypothèses moléculaires, mais ils ajoutaient que, dès l'instant où l'on possédait ces équations, ces hypothèses étaient devenues superflues. Tous en avait juré la mort ! » Ce point de vue, dont l'analogue serait facile à trouver dans la Mécanique quantique contemporaine, ne satisfaisait nullement Boltzmann et il entreprit contre les énergétistes une lutte que les circonstances rendaient très ardue. « A l'époque, écrit Dugas, où Boltzmann menait ce combat contre la phénoménologie régnante. les théories moléculaires, temporairement du moins, ne portaient plus de fruits : cela rendait sa position difficile alors qu'un avenir très proche, mais encore inaperçu, devait lui donner bientôt raison. »

Boltzmann n'a pas cessé de décocher des flèches acérées contre l'énergétique. Parmi elles, nous citerons la critique jugée par Dugas particulièrement savoureuse où Boltzmann s'amuse à se montrer plus exigeant que les énergétistes sur leurs principes mêmes en disant : « Mais aucune de ces constructions [des énergétistes] ne remplit les promesses de l'énergétique. Car tout d'abord elles reposent sur l'hypothèse première que les corps sont constitués de points matériels, ce qui dans l'esprit de l'énergétique constitue une restriction gratuite à la liberté de notre pensée. » Et ailleurs, développant une remarque ironique un peu apparentée à la précédente, il écrit : « Je n'ai pu jusqu'ici me représenter comment une mécanique peut être construite à l'aide de l'hypothèse que l'énergie cinétique du mouvement est une donnée première alors que l'objet même du mouvement (ce qui se meut) ne serait qu'un concept dérivé. » Je glanerai également cette petite phrase dont on pourrait facilement faire une application à ce que l'on voit de nos jours : « Déjà un grand nombre de jeunes gens se tournent vers les moissons faciles que leur promettent les différents domaines de l'énergétique sans posséder la critique (l'esprit critique) qui est nécessaire pour œuvrer utilement en Physique théorique. » Je borne là ces quelques citations qui suffisent à montrer l'intérêt remarquable de cette partie du volume.

Avant de passer à la seconde partie de son livre, René Dugas avait fait précéder le bref résumé du curriculum vitae de Boltzmann par un court chapitre consacré aux dernières années où, avant sa mort tragique, il avait enseigné à Vienne la philosophie des sciences dans une chaire où il avait succédé à Mach. Mais le grand physicien n'était plus là dans son véritable élément et son enseignement philosophique ne paraît pas avoir eu la portée de son œuvre scientifique.

La seconde partie du livre de M. Dugas est intitulée Méthode et dialectique de Boltzmann. *Au début de l'avant-propos, l'auteur nous dit : « Il nous faut maintenant pénétrer de façon plus intime dans la méthode et la dialectique de Boltzmann, en le voyant à l'œuvre à la fois dans sa pensée créatrice et dans la défense de ses idées où il excellait. » Je n'entrerai pas dans le détail du très bel exposé qui suit les premiers travaux de Boltzmann sur l'interprétation statistique de la Thermodynamique, notamment sur la loi de répartition des vitesses de Maxwell, la démonstration du théorème* H, *l'emploi du théorème de Liouville, la formulation en théorie cinétique des gaz du second principe de la Thermodynamique... Particulièrement intéressant est l'exposé qui vient ensuite des objections élevées par Loschmidt contre les conclusions de Boltzmann et des discussions longues et passionnées qui eurent lieu à ce sujet entre les deux savants. Une seule, mise à part, sur laquelle nous reviendrons tout à l'heure, toutes les objections de Loschmidt furent réduites à néant par Boltzmann notamment celle qui portait sur l'équilibre des gaz dans un champ de force (le champ de la pesanteur par exemple) et, au cours de ces controverses ardentes, Boltzmann précisant sans cesse sa position eut l'occasion de montrer toute la vigueur de sa pensée et toute l'agilité de sa dialectique.*

Une des objections de Loschmidt cependant ne fut pas aussi facile à écarter : c'est l'objection, souvent encore citée aujourd'hui, qui affirme l'impossibilité de faire sortir des équations réversibles de la Mécanique une interprétation des processus irréversibles de la Thermodynamique. En présence de cette embarrassante objection, Boltzmann, apercevant bien ce qu'elle contenait d'exact, a rapidement reconnu que sa démonstration primitive du second principe de la Thermodynamique était insuffisante et qu'il fallait lui substituer une démonstration faisant intervenir le calcul des probabilités. Le type de raisonnement qu'il a développé permet d'apercevoir le sens véritable de l'augmentation de l'entropie et il est encore couramment développé aujourd'hui dans les traités de Mécanique statistique. Et Dugas de noter que, loin de se laisser abattre par l'objection de réversibilité, Boltzmann y a trouvé aussitôt un levier et que cela témoigne à la fois de l'ouverture de son esprit à la critique et de la puissance de sa dialectique. Et pour rendre plus intuitives les nouvelles conceptions auxquelles il était parvenu et écarter de nouvelles formes de l'objection de réversibilité, l'infatigable lutteur

construisait la courbe infiniment brisée qui, selon lui, représentait les variations au cours du temps de sa célèbre fonction H *et permettait de comprendre pourquoi elle a toujours beaucoup plus de chance de décroître que de croître.*

Une nouvelle objection contre l'interprétation boltzmannienne de l'irréversibilité thermodynamique fut développée par le mathématicien Zermelo en s'appuyant sur un théorème célèbre de Henri Poincaré relatif à la quasi-périodicité du mouvement des systèmes mécaniques astreints à certaines conditions. Boltzmann se défendit de nouveau avec vigueur et, sans arriver, semble-t-il, à convaincre son adversaire, parvint à démontrer que l'objection de Zermelo n'avait pas la portée que celui-ci lui attribuait. Quelques doutes cependant subsistaient sur la validité de la courbe H *envisagée par Boltzmann. Ce n'est qu'après la mort de l'illustre physicien que P. et T. Ehrenfest dans un mémoire resté célèbre parvinrent, en complétant et en rectifiant certains points de ses raisonnements, à montrer que l'emploi de la courbe* H *pouvait bien servir à donner une interprétation de l'irréversibilité thermodynamique. Ainsi Boltzmann sortait finalement entièrement vainqueur de la bataille et l'exactitude de ses profondes intuitions se trouvait complètement démontrée.*

Sous le titre Prolongements modernes, *la troisième et dernière partie de l'ouvrage nous montre les répercussions de l'œuvre de Boltzmann sur toute la physique contemporaine et dégage les conclusions que l'on peut tirer de la longue lutte qu'il eut jadis à soutenir. On y trouve d'abord une analyse rapide des conceptions générales développées par l'illustre Willard Gibbs dans son livre* Elementary principles in statistical Mechanics *concernant notamment les distributions canoniques et microcanoniques et les diverses définitions possibles de l'entropie. Puis sont résumées les observations optimistes de M. Hadamard sur la validité de la Mécanique statistique et les contributions apportées à cette science nouvelle, notamment en ce qui concerne la distinction entre l'entropie fine et l'entropie grossière, par Henri Poincaré dont l'attitude vis-à-vis de l'ensemble de la théorie resta assez réservée.*

Puis René Dugas s'étend sur l'attitude de Planck vis-à-vis de la Mécanique statistique et nous le montre se rapprochant de plus en plus, après une comparaison des idées de Boltzmann avec celles de Gibbs, des conceptions développées par le premier. Il cite la conclusion particulièrement nette de Planck : « Je crois pouvoir conclure de cette étude que la généralité apparente donnée par Gibbs à ses différentes définitions de l'entropie, en ce sens que rien n'y est spécifié de la nature du système considéré, s'achète au prix d'une limitation de la signification physique de ces définitions. Pour tous les processus réversibles, les définitions de Gibbs rendront de bons services comme de nombreuses autres définitions possibles de nature plus formelle encore. Pour les processus irréversibles au contraire, qui

donnent essentiellement à l'entropie sa signification propre et qui seuls fournissent la clef d'une entière compréhension de l'équilibre thermique, la définition de Boltzmann se révèle, parmi toutes celles qui ont été avancées jusqu'ici, comme la plus adéquate et la plus utile. » Ainsi conquis par les idées de Boltzmann et sous son influence directe, Planck va maintenant s'orienter vers sa découverte des quanta aux immenses répercussions. Et Dugas nous rappelle alors un point bien curieux et assez oublié de l'histoire de la Science contemporaine : Planck avait commencé ses études sur la thermodynamique du rayonnement en admettant, conformément à la théorie de Maxwell-Lorentz, que l'émission et l'absorption du rayonnement s'opèrent d'une façon continue, mais Boltzmann, toujours « finitiste » de tendance, lui fit observer qu'il n'arriverait jamais à expliquer d'une façon satisfaisante les processus irréversibles dans le domaine du rayonnement sans introduire quelque part dans sa description des échanges d'énergie entre matière et radiation un élément de discontinuité permettant des dénombrements. Convaincu par cette remarque, Planck fut ainsi amené à introduire l'émission et l'absorption par quanta d'énergie et, par des raisonnements mémorables dont l'ouvrage nous donne un aperçu, à obtenir sa célèbre formule donnant une répartition spectrale du rayonnement noir conforme à l'expérience.

Après avoir rapidement signalé l'opposition de Planck à la tendance énergétiste en général ainsi qu'aux conceptions positivistes de Mach, Dugas entreprend l'étude des contributions d'Albert Einstein à la thermodynamique statistique. Dans des mémoires écrits fort jeune et restés un peu inaperçus, Einstein a fait un exposé très personnel des principes de la Mécanique statistique en suivant une voie assez analogue à celle de Gibbs dont il ignorait alors totalement les travaux, puis il s'était rapproché du point de vue de Boltzmann et c'est en introduisant des conceptions d'atomisme et de discontinuité qu'il parvint peu après à d'admirables résultats dans la théorie du mouvement brownien et dans celle, alors révolutionnaire, de la structure discontinue de la lumière et des fluctuations dans le rayonnement noir : il rejoignait ainsi les remarques profondes que Boltzmann avait communiquées à Planck sur la nécessité, pour obtenir une théorie thermodynamique du rayonnement, d'imaginer au sein de celui-ci des discontinuités susceptibles d'être dénombrées. Ainsi, malgré les critiques qu'Einstein a parfois adressées à la méthode boltzmannienne, on peut dire que la pensée du grand promoteur de la théorie cinétique de la matière a constamment éclairé et fécondé ses recherches.

L'étude du texte de M. Dugas dans cette partie de son livre et le souvenir de conversations que j'ai eues avec lui à ce sujet me permettent, je crois, d'affirmer que sa conclusion était à peu près la suivante : la méthode de Boltzmann intuitive et parfois peu rigoureuse lui paraissait beaucoup plus

féconde que les exposés très élégants dans leur rigueur, mais très abstraits, de Gibbs. Il en voyait la preuve dans le fait que les admirables découvertes réalisées par Planck et par Einstein, le premier dans l'étude du rayonnement noir, le second dans l'étude du mouvement brownien et dans la théorie des « quanta de lumière », n'avaient pu être obtenus par eux qu'en se laissant guider par la méthode de Boltzmann et en s'inspirant de son esprit. On juge l'arbre à ses fruits !

Les derniers paragraphes du volume sont consacrés à l'analogie très vivement ressentie, nous l'avons dit, par Dugas, entre la situation actuelle en Physique quantique et celle où Boltzmann se débattait pendant la plus grande partie de sa carrière. Depuis trente ans environ, s'est constituée en Physique quantique une sorte d'orthodoxie assez semblable à l'énergétique qui, s'appuyant sur des conceptions phénoménologiques et positivistes, présente les idées de la mécanique ondulatoire et leurs prolongements sous une forme abstraite et formelle d'aspect très rigoureux et croit avoir ainsi résolu l'énigme de la dualité des aspects corpusculaires et ondulatoires en Microphysique. Dans mes premiers travaux sur la Mécanique ondulatoire, j'avais au contraire tenté de me faire une image claire et synthétique de la dualité des ondes et des corpuscules conforme en somme aux tendances de Boltzmann et aux conceptions des défenseurs de l'hypothèse atomique alors en plein triomphe. Depuis quelques années, certains travaux faits par de jeunes chercheurs et par moi-même ont été effectués pour reprendre la voie que j'avais autrefois indiquée. Ce n'est pas le lieu d'ouvrir une controverse sur ce sujet et je me contenterai de noter qu'après avoir résumé ces travaux récents, M. Dugas concluait en disant : « A cet égard, les savants qui cherchent à développer le courant intuitif de la dualité onde-corpuscule sont, vis-à-vis des orthodoxes de la mécanique quantique actuelle, dans une position extrêmement analogue à celle de Boltzmann, atomiste impénitent, devant les énergétistes de son temps. »

En fermant le volume, on ne pourra échapper à l'impression que René Dugas fut un grand historien des sciences, un érudit scrupuleux et averti, qui savait choisir et commenter avec sagacité et profondeur les textes les plus caractéristiques des savants dont il étudiait l'œuvre. Et cette constatation ne pourra que rendre plus vif l'immense regret que nous ressentons d'avoir vu disparaître un homme plein de modestie et d'aménité, un esprit d'une très vaste culture et d'une très grande finesse qui faisait honneur à la pensée française.

LOUIS DE BROGLIE.

Introduction

Ludwig Boltzmann, dont l'œuvre appartient au dernier tiers du XIXe siècle, est un des penseurs dont l'influence a été la plus profonde sur le développement de la science moderne ; il suffit à cet égard de citer les travaux de Planck et d'Einstein sur la théorie statistique du rayonnement, sur l'hypothèse des quanta et sur celle des photons, qui se présentent à l'origine comme une illustration du principe de Boltzmann sur l'interprétation de l'entropie en termes de probabilités.

En marge de ses travaux purement scientifiques, Boltzmann n'a pas donné, à l'exemple de Duhem, d'exposé systématique des méthodes de la physique théorique. Les idées qu'il a professées et défendues en cette matière sont éparses dans des conférences, dans des leçons inaugurales et dans les biographies qu'il a écrites en hommage à plusieurs hommes de science de son temps, tels Kirchhoff, Stefan et Loschmidt. Au soir de sa carrière, Boltzmann a réuni lui-même ces différents matériaux, sous le titre de *Populäre Schriften*, dans un ouvrage qui ne semble pas avoir reçu du public international, et en particulier en France, toute l'attention qu'il méritait et mérite encore.

L'intérêt de la philosophie scientifique de Boltzmann ne réside pas seulement dans l'illustration qu'elle apporte à son œuvre même, dont la grande richesse s'accompagne d'une extrême complexité, mais aussi dans les débats de principe qui l'ont opposé à l'école alors régnante.

Si l'évolution de la science devait bientôt donner raison à Boltzmann qui, en son propre pays, était demeuré le seul tenant de ce que l'on appelait alors l'hypothèse moléculaire, tandis que la phénoménologie s'exprimait dans l'énergétique, notre temps a assisté à un retour offensif de la phénoménologie avec l'interprétation dite orthodoxe de la mécanique quantique ; plus récemment une réaction s'est manifestée en faveur d'un retour à des images ou à des structures, soit par simple recours à des variables cachées, soit en donnant à une association nouvelle de

l'onde et du corpuscule une signification physique par le moyen de ce que L. de Broglie a appelé la théorie de la double solution.

C'est dire que les oppositions d'idées vécues par Boltzmann avec tant d'intensité n'ont pas perdu de leur actualité et que la philosophie scientifique de Boltzmann peut recéler encore d'utiles leçons pour notre temps. Cela est une raison de plus d'en remettre l'analyse à l'ordre du jour, ce qui sera notre propos dans ce modeste essai.

RETOUR A BOLTZMANN

La tendance est assez naturelle d'accepter les conquêtes essentielles de certaines œuvres difficiles sans en avoir pénétré, faute d'une lecture suffisamment attentive, les ressorts véritables. Le mystère en peut ainsi survivre à une tradition suffisamment répandue pour être devenue classique. Tel est, semble-t-il, à bien des égards le cas de l'œuvre de Boltzmann, qui traduit une pensée intuitive en constante évolution, parfois semée de contradictions, mais d'une indéniable puissance et dont l'influence a été considérable sur le développement ultérieur de la science.

Comme tout véritable novateur, Boltzmann a rencontré de son vivant les oppositions les plus vives : de la part de l'école énergétique, sur la valeur même des modèles moléculaires ; de la part d'autres théoriciens et mathématiciens, sur l'impossibilité de concilier à la fois la réversibilité des équations différentielles de la dynamique et la quasi-périodicité de leurs solutions avec l'irréversibilité de l'entropie.

Boltzmann ne manquait ni d'imagination, ni de dialectique pour faire face à ses contradicteurs. Et s'il a souffert de l'opposition dont il était l'objet, il a nourri l'espoir, que l'expérience devait vérifier, de voir germer dans un avenir meilleur le grain qu'il avait semé.

Mais, en attendant une confirmation de ses idées qui devait être trop tardive, Boltzmann essuyait l'indifférence ou les critiques de ses contemporains ; c'est ainsi qu'il écrivit en 1898, dans la préface à la deuxième partie de son traité sur la théorie cinétique des gaz : « Les attaques contre la théorie des gaz se multipliaient [lors de l'impression de la première partie de mon traité]. J'ai maintenant la conviction qu'elles reposent sur des malentendus et que le rôle de la théorie des gaz dans la science est loin d'être terminé. » Boltzmann ajoutait, après avoir invoqué les résultats de Van der Waals, Ramsay et Smoluchowski :

« Ce serait à mon avis dommage pour la Science que la théorie des gaz tombât momentanément dans l'oubli, par suite de l'hostilité générale à laquelle elle est actuellement en butte, de même qu'autrefois l'autorité de Newton fit succomber pendant quelque temps la théorie des ondulations.

» Je sais combien, quand on est isolé, on demeure impuissant à lutter contre les courants de son temps. Pourtant, j'ai voulu contribuer, dans la mesure de mes forces à ce qu'on n'ait pas trop de choses à redécouvrir quand on reviendra à la théorie des gaz [1]. »

Au début de son traité, Boltzmann se demande : « Qui sait même si, un jour, on ne considérera pas comme un pas en arrière la tendance moderne [c'est-à-dire la tendance énergétique] ; car l'histoire des Sciences nous montre que bien souvent on a reconnu comme fausses des généralisations faites pour élargir les connaissances théoriques. Qui peut voir dans l'avenir ? Que tous les chemins soient donc libres, et arrière toute dogmatique pour ou contre les idées atomistiques [2]. » Et Boltzmann réclame le droit de recourir à des *analogies mécaniques*, sans affirmer pour autant la réalité de l'hypothèse moléculaire.

De façon plus précise, vers la fin de son traité, Boltzmann déclare : « Il n'est jamais venu à l'idée de personne d'exiger, pour l'amour de la théorie moléculaire, qu'elle soit universellement imposée. Mais aussi, il est bon d'éviter l'autre opinion extrême, le dogme de la sacro-sainte phénoménologie... A côté de la Thermodynamique générale, et sans diminuer son importance qu'on ne doit jamais chercher à restreindre, il est également indispensable pour approfondir notre connaissance de la nature, de développer les images mécaniques et de les rendre palpables [3]. »

La pensée scientifique de Boltzmann se trouve ici clairement exprimée et elle se retrouve vivante tout au long de son œuvre pour l'inspirer et l'éclairer. Bien que peu considérée par les savants de la fin du XIXe siècle, cette œuvre et les principes qui l'animaient devaient recevoir, dès le début de ce siècle, une confirmation éclatante et se trouver ainsi étroitement liés aux grands bouleversements de la physique contemporaine. Et voici que maintenant s'ouvre à nouveau le débat entre partisans de la phénoménologie et partisans des analogies mécaniques à l'occasion du difficile problème de l'interprétation de la mécanique ondulatoire. C'est pourquoi il nous a paru utile de revenir en arrière et de nous pencher à nouveau sur l'œuvre de Boltzmann, sur ses conceptions concernant la théorie physique, sur les luttes serrées qu'il dut mener contre de nombreux contradicteurs et enfin sur le triomphe de ses idées, en espérant ainsi montrer que l'histoire des sciences n'est pas seulement une œuvre d'érudition, mais qu'elle peut aussi contribuer à guider la pensée scientifique du moment.

[1] L. Boltzmann, II, pp. VII-VIII. Nous suivons ici la traduction française, Gauthier-Villars, éd., Paris, 1902 et 1905, en désignant les deux tomes de ce traité par I et II.

[2] *Ibid.*, I, p. 4.

[3] *Ibid.*, II, pp. 250-251.

La nature de notre sujet nous a conduit à diviser cet ouvrage en trois parties principales. Dans la première partie, intitulée *La théorie physique au sens de Boltzmann*, nous nous sommes efforcé de préciser la philosophie scientifique de Boltzmann dans son ensemble et de la situer par rapport aux autres tendances de l'époque et plus particulièrement à l'école énergétique. Nous verrons comment Boltzmann, face à cette école énergétique, concevait le rôle des modèles dans la théorie physique et comment il justifiait l'emploi d'images ou d'analogies mécaniques ; afin de restituer aussi fidèlement que possible la pensée de notre auteur, nous l'avons suivi dans ses exposés sur la théorie électromagnétique de Maxwell, sur la théorie cinétique des gaz et sur les principes de la mécanique. Nous avons d'ailleurs jugé utile d'insister sur ce dernier point, car Boltzmann s'y livre à une analyse serrée du rôle des images de pensée *(Gedankenbilder)* dans la constitution de cette science en abordant l'étude de ses principes par la double approche de la méthode déductive et formelle de Hertz et de la méthode inductive plus proche de l'évolution historique. Enfin, après avoir rappelé les points fondamentaux de la doctrine énergétique, nous leur opposons la pensée mécaniste de Boltzmann et ses conceptions sur la nécessité de l'atomistique qui sont à la base de toute son œuvre sur la théorie cinétique des gaz.

Il fallait ensuite pénétrer plus profondément dans la méthode de Boltzmann et en montrer l'application à des problèmes déterminés. Il était naturel de choisir comme sujet de cette étude la théorie cinétique des gaz et plus spécialement les difficiles questions du théorème H et de l'interprétation cinétique de l'entropie qui font ainsi l'objet de la deuxième partie, *Méthode et Dialectique de Boltzmann*. Nous y avons rappelé d'abord les principes de la théorie cinétique des gaz ainsi que les raisonnements conduisant à la loi de distribution des vitesses de Maxwell et à l'équation d'évolution des gaz. Alors pouvions-nous aborder le problème fondamental de l'interprétation cinétique de l'entropie, point crucial de l'œuvre de Boltzmann, pour lequel a été reproduite pas à pas la démarche créatrice de l'auteur en suivant ses mémoires originaux. Loin de briser son élan ou de ralentir sa progression, la vigueur des critiques venues d'horizons scientifiques variés ne devait au contraire qu'affermir, en la précisant, la pensée de Boltzmann et le mener au concept de l'interprétation statistique de l'entropie dont les conséquences ont été si fécondes. Rien ne montre mieux la subtilité et la richesse de l'argumentation de Boltzmann que la longue polémique qui l'opposa à Loschmidt d'abord, à Zermelo ensuite ; dans ses réponses aux nombreuses objections de ses contradicteurs, Boltzmann éclaire successivement les différents aspects du problème et montre ainsi la cohérence et les ressources de l'interprétation probabiliste de l'irréversibilité de l'en-

tropie ; c'est pourquoi nous avons dû consacrer un assez long développement à ces questions.

Mais malgré la solidité de ses bases et la hardiesse de sa conception, le bel édifice de la théorie cinétique des gaz laissait indifférents et hostiles les tenants de l'école énergétique alors régnante, opposés à l'intervention de modèles et en particulier de l'hypothèse moléculaire en théorie physique. La confirmation du bien-fondé des idées de Boltzmann devait venir d'autres domaines de la science, ceux de l'électromagnétisme et du rayonnement où la découverte capitale des quanta de Planck devait ouvrir un chapitre nouveau de la Physique. Nous avons abordé ces questions dans notre troisième partie, intitulée *Prolongements modernes* : ici encore un choix s'imposait et nous avons dû nous borner à exposer les recherches qui devaient transformer nos conceptions sur le monde physique. C'est pourquoi, après avoir développé la méthode formelle de Gibbs sur les analogies thermodynamiques des ensembles de mouvements dont les applications sont maintenant si usuelles dans la mécanique statistique moderne et avoir rappelé ce que devaient à Boltzmann les importants travaux d'Einstein sur le mouvement brownien, nous approfondissons surtout les recherches fondamentales de Planck et d'Einstein relatives au rayonnement, à l'étude de sa répartition spectrale et des équilibres rayonnement-matière. Ces études de thermodynamique statistique conduisirent Planck à formuler sa célèbre hypothèse des quanta d'énergie et du quantum d'action, hypothèse qui devait bientôt être reprise par Einstein avec l'introduction des quanta de lumière, ou photons, pour rendre compte de l'effet photo-électrique. Pour la première fois se trouvait posée clairement la question du dualisme onde-corpuscule dans l'étude des phénomènes lumineux, dualisme que L. de Broglie allait étendre quelques années plus tard à l'ensemble des phénomènes matériels, avec les idées de la mécanique ondulatoire ; tous ces développements se présentent ainsi comme un prolongement naturel des travaux de Boltzmann sur l'interprétation probabiliste de l'entropie en théorie cinétique des gaz et ils apportent une preuve éclatante de la fécondité des modèles mécaniques dans l'étude des phénomènes physiques. Nous avons enfin voulu montrer que la situation actuelle de la Physique présentait une certaine analogie avec celle qui existait du temps de Boltzmann, en exposant brièvement les principes d'une réinterprétation causale de la mécanique ondulatoire entreprise sous la forme de la théorie de la double solution par L. de Broglie et ses élèves. Celle-ci permettrait de donner une signification physique au dualisme onde-corpuscule en attribuant une structure appropriée à l'onde et à sa singularité (le corpuscule), et de rétablir de cette manière une description causale, en termes d'images physiques dans l'espace et

dans le temps, de l'interaction entre le corpuscule et son onde. C'est précisément une telle description qui est déclarée impossible par l'interprétation orthodoxe de la mécanique ondulatoire qui rallie, à l'heure actuelle, la majorité des physiciens dont la position est ainsi comparable aux tenants de l'ancienne phénoménologie et, sans préjuger de l'avenir d'une théorie particulière, nous espérons avoir contribué à montrer par ce retour à Boltzmann qu'il peut être parfois dangereux pour la théorie physique de renoncer à s'aider d'analogies ou de modèles mécaniques, imparfaits mais féconds.

PREMIÈRE PARTIE

LA THÉORIE PHYSIQUE AU SENS DE BOLTZMANN

CHAPITRE PREMIER

Boltzmann et la mathématique : infini, continu et équations différentielles de la physique

Le grand traité de Boltzmann sur la théorie cinétique des gaz, *Vorlesungen über Gastheorie*, [2], s'insère entre des leçons consacrées à la théorie électromagnétique *(Vorlesungen über die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Lichtes*, [1]*)* et un ouvrage de pure mécanique *(Vorlesungen über die Principe der Mechanik*, [3]*)*.

Cet ordre est à la fois celui des travaux originaux de Boltzmann, qui avait débuté dans la science en 1865 par des recherches à la fois théoriques et expérimentales sur l'électricité, et celui de ses leçons magistrales dans le domaine de la physique.

Il suffit d'ailleurs de noter, dans le développement de son grand traité, la tendance de plus en plus nette d'introduire, en théorie cinétique, les systèmes les plus généraux de la mécanique analytique classique. Dans le premier volume de la *Gastheorie*, les molécules sont tout d'abord des sphères élastiques considérées en l'absence de toute force extérieure et de tout mouvement d'ensemble sensible, puis des centres de force, les restrictions quant aux forces extérieures et aux mouvements d'ensemble étant levées. Dans le second volume, les molécules deviennent des systèmes « sur la nature desquels nous ne savons rien, si ce n'est que leurs variations sont déterminées par les équations mécaniques générales de Lagrange et Hamilton [1] ».

En d'autres termes, au modèle naïf des sphères élastiques se substituent des modèles de plus en plus abstraits et généraux dont l'étude ramène Boltzmann à l'approfondissement des principes de la mécanique et à leur application à un nombre infini de systèmes de même nature et soumis aux mêmes équations du mouvement, mais en partant de conditions initiales différentes [2].

Dans la première partie de l'étude qui nous occupe ici, et qui est

[1] [2], p. 61.
[2] *Ibid.*, p. 64.

principalement fondée sur les écrits d'interprétation où Boltzmann a donné la clef de sa conception de la théorie physique, il nous paraît préférable de ne pas suivre l'ordre chronologique des textes que nous analyserons, et d'aller du simple au composé en étudiant d'abord — et très brièvement — la pensée purement mathématique de Boltzmann, puis ses idées sur les principes de la mécanique, avant d'aborder la discussion des théories physiques.

En mathématique, Boltzmann est résolument *finitiste* ; d'une façon plus précise, il révoque toute considération d'un infini *actuel* et ne considère tout ensemble infini que comme la limite d'une collection d'individus en nombre très grand, mais fini. Ajoutons que cette collection finie est seule douée à ses yeux de réalité physique.

Montrons-le par quelques exemples :

« Si, déclare Boltzmann, je dis à quelqu'un de sommer réellement un nombre infini de termes de la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, il ne pourra pas y parvenir. Mais si je lui dis de sommer suffisamment de termes pour qu'une nouvelle augmentation ne puisse influencer le résultat de façon sensible, je lui ai donné ainsi une règle clairement applicable, et toutes les démonstrations par lesquelles on établit que la somme d'une infinité de termes de cette série est égale à 2 n'ont d'autre sens que le fait d'ajouter encore des milliers et des milliers de termes ne conduit jamais à dépasser la valeur 2, mais permet d'en approcher toujours davantage [1]. »

Et encore :

« Les concepts du calcul différentiel et intégral dégagés de toute représentation atomiste [entendez par là des collections finies d'objets qui leur ont donné naissance] sont purement métaphysiques, si par là nous entendons, selon une fameuse définition de Mach, les choses dont nous avons oublié comment nous y sommes parvenus [2]. »

L'automatisme du calcul ne doit pas nous faire oublier ces origines finitistes :

« On peut certes, dans les manipulations devenues coutumières des symboles du calcul intégral, oublier le point de départ de la considération d'un nombre fini d'éléments servant de base à la formation des concepts, mais on ne peut en réalité en faire abstraction...

» Cela n'exclut naturellement pas qu'après s'être habitué à l'abstraction des éléments de volume et aux autres symboles du calcul intégral et s'être exercé à leur méthode opératoire, il soit commode et naturel

[1] [12], p. 160.
[2] *Ibid.*, note 1.

[pour étudier les apparences macroscopiques] de ne plus se souvenir de la signification atomiste propre de ces abstractions. Celles-ci sont un schéma général pour tous les cas où, dans un millimètre cube, on imagine 10^{10} ou $10^{10^{10}}$ ou des milliards de fois plus d'éléments de volume ; elles sont par suite indispensables à la géométrie, qui doit traduire correctement les cas les plus variés de la physique où le nombre des éléments peut être très différent. Il est extrêmement utile, dans l'utilisation de tels schémas, de laisser de côté le concept de base dont ils sont extraits, et même de l'oublier entièrement ; *mais je crois que cela serait une erreur de penser que l'on s'en soit pour autant affranchi* [1]. »

Il en va de même des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique :

« On a proposé comme idéal le simple établissement d'équations aux dérivées partielles et la prédiction des phénomènes à l'aide de celles-ci. Mais ces équations elles-mêmes ne sont rien d'autre que des règles pour la construction d'autres images, qui sont des séries de nombres. Les équations aux dérivées partielles exigent la construction d'ensembles de nombres qui forment une multiplicité à plusieurs dimensions. Elles ne traduisent, lorsqu'on se souvient de la signification de leur symbolisme, rien d'autre que l'exigence de se représenter de très nombreux points de semblables multiplicités et par là de déduire, suivant des règles définies, de nouveaux points de cette multiplicité, en imaginant en quelque sorte une propagation des points à travers celle-ci [2]. »

C'est ce que vient illustrer le mécanisme donnant naissance à l'équation de Fourier en théorie de la chaleur :

« Nous demandons que l'on imagine, dans un domaine limité de l'espace, un grand nombre fini de points, comme les sommets de cubes disposés en couches régulières. Nous admettons en outre qu'à l'instant initial une température déterminée puisse être attachée à chacun de ces points. Supposons qu'au bout d'un temps très petit, mais fini, la température de chaque point devienne la moyenne arithmétique de celles des six points qui l'entourent. Après un second intervalle de temps égal au premier, nous obtiendrons, par la même loi, une nouvelle répartition des températures, et ainsi de suite. Nous avons ainsi assigné un mode de calcul parfaitement défini, qui pourrait peut-être être simplifié eu égard aux régularités qu'il comporte, mais qui, avec la patience voulue, doit conduire au but de façon univoque et certaine. Nous qualifierons ce procédé, en raison de sa clarté et de son univocité, de modèle exempt de contradiction du point de vue de la théorie de la connaissance et, en

raison de la considération d'un nombre fini d'éléments, de modèle atomiste au sens large.

» Nous pouvons encore demander d'imaginer des points et des intervalles de temps qui soient de densité un milliard de fois supérieure, et ainsi de suite, en sorte que toute division ultérieure n'aurait plus aucune influence appréciable à aucun instant sur la température en aucun point. Notre modèle demeure atomiste et ne prête à aucune objection du point de vue de la théorie de la connaissance. Que l'intéressé trouve le temps d'effectuer tous ces calculs ou qu'il soit en mesure de faciliter l'obtention de la limite cherchée par des artifices de calcul, cela le regarde. La tâche est clairement définie et peut être résolue en un temps suffisant [1]. »

J'arrête ici ces considérations sur l'interprétation des équations de la physique mathématique, qui sont d'ailleurs mêlées à d'autres débats. Ajoutons seulement que Boltzmann ira jusqu'à plaider que le concept même de continu est inséparable de l'atomistique.

J'en viens à un autre exemple, dans un domaine tout différent, du finitisme mathématique de Boltzmann. Au début de son mémoire fondamental de 1877 sur l'interprétation probabiliste de l'entropie, Boltzmann considère un nombre discret d'individus (molécules) susceptibles de posséder seulement des énergies cinétiques elles-mêmes discrètes.

« Bien que, déclare Boltzmann, cette façon de traiter le problème puisse au premier abord sembler très abstraite, c'est elle qui, dans la plupart des cas, conduit cependant le plus rapidement au but dans ce genre de questions ; et si l'on considère que *dans la Nature tout infini ne signifie jamais rien d'autre qu'un passage à la limite*, on ne peut concevoir la multiplicité infinie des vitesses que chaque molécule est susceptible de prendre autrement que comme le cas limite intervenant lorsqu'une molécule reçoit un nombre de vitesses de plus en plus grand [2]. »

Dans le cas d'espèce, ce finitisme devait avoir des suites considérables, non seulement en théorie cinétique, mais en théorie des quanta avec Planck et Einstein : cela, nous le verrons en son temps.

Nous n'en dirons pas davantage sur l'attitude mathématique de Boltzmann, laquelle est d'ailleurs inséparable de sa pensée physique. Au lecteur qui pourrait être tenté de trouver sommaire une condamnation aussi radicale de l'infini actuel, dont ni Boltzmann, ni la physique atomiste en général n'ont eu d'ailleurs à se repentir, je me permettrai de rappeler le témoignage de Baire, qui cependant avait été l'un des premiers à mettre en œuvre le transfini :

[1] [12], pp. 158-159.
[2] [31], pp. 167-168.

Dès qu'on parle d'infini (même dénombrable, et c'est ici que je suis tenté d'être plus radical que Borel), l'assimilation, *consciente ou inconsciente*, avec un sac de billes que l'on donne de la main à la main, doit complètement disparaître et nous sommes à mon avis dans le *virtuel*, c'est-à-dire que nous faisons des conventions qui doivent nous permettre, un objet étant défini *par une nouvelle convention*, d'affirmer certaines propriétés de cet objet. Mais croire qu'on est allé plus loin ne me paraît pas légitime. En particulier, de ce qu'un ensemble est donné (nous serons d'accord pour dire, par exemple, que nous nous donnons les suites d'entiers positifs), *il est faux pour moi de considérer les parties de cet ensemble comme données*. A plus forte raison, je refuse d'attacher un sens au fait de concevoir un choix fait dans chaque partie d'un ensemble.

Le progrès consisterait à délimiter le domaine de ce qui est définissable. Et, en fin de compte, en dépit des apparences, tout doit se ramener au fini [1].

[1] *Lettre de Baire à Hadamard*, citée dans Borel, [1], *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier Villars, 2e éd., Paris, 1914, p. 152.

CHAPITRE II

Discussion des principes de la mécanique

Nous suivons ici, essentiellement, des leçons professées en 1899 par Boltzmann à la Clark University (USA), sous le titre *Über die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik*, [16], en y intercalant toutefois quelques extraits d'autres exposés de Boltzmann sur le même sujet, pour préciser certains points, notamment à propos des thèses de Kirchhoff et de Hertz.

Boltzmann rappelle tout d'abord que la mécanique, en l'état de perfection où l'avait amenée l'œuvre des grands géomètres de Newton à Hamilton par Lagrange, Laplace et Poisson, semblait devoir constituer un édifice achevé, destiné à servir de modèle aux autres branches de la physique théorique. Il y avait là une science souverainement exemplaire *(mustergültige Herrin)*.

Il n'en était que plus inattendu de voir s'élever à l'époque, particulièrement en Allemagne, d'assez vives controverses portant précisément sur les principes de la mécanique analytique. En scrutant à la loupe l'édifice newtonien, beaucoup de difficultés étaient apparues, comme l'esprit humain en rencontre toujours en cherchant à analyser les bases les plus simples de la connaissance.

« Ces difficultés, déclare Boltzmann, sont à vrai dire de nature plutôt philosophique ou, comme on dit aujourd'hui, ont trait à la théorie de la connaissance *(Erkenntnistheorie)*. Nous autres Allemands avons été copieusement moqués pour notre tendance à la spéculation philosophique, et cela, certes, souvent à bon droit autrefois... Mais la méthode d'une telle analyse s'est beaucoup perfectionnée au cours du temps et si, aujourd'hui comme hier, elle demeure dépourvue de toute portée pratique, elle est loin d'être aussi vide de substance que l'ancienne philosophie... Les Allemands ne sont plus les rêveurs dénués de sens pratique qu'ils étaient autrefois [1]. »

[1] [16], p. 254.

Et Boltzmann invite son public américain à pénétrer avec lui dans un domaine de la théorie de la connaissance, en revenant sur les objections formulées à l'égard de la mécanique newtonienne.

L'espace absolu n'est en aucune manière accessible à notre expérience, qui ne connaît que des changements de position relative des corps. Par ce concept, la mécanique va dès l'origine bien au-delà de l'expérience, « ce qui est grave dans une science qui s'est donnée pour seule tâche de représenter les faits [1] ».

Newton n'avait introduit l'espace absolu que pour parvenir à une formulation simple de la loi d'inertie. Des critiques modernes ont essayé, sans grand succès, d'échapper à cette servitude de l'espace absolu : Neumann y substitue un corps de référence idéal et problématique, ce qui de toute évidence l'entraîne tout autant que Newton au-delà de l'expérience. Streintz enseigne comment, à l'aide d'un gyroscope sur lequel n'agit aucune force, ou seulement des forces connues, on peut décider si, dans un système de référence donné, les lois newtoniennes sont ou non valables. Il présuppose ainsi les lois du mouvement d'un gyroscope en rotation et préjuge de l'action ou de l'absence de forces, ce qui exige la connaissance préalable des lois newtoniennes. Lange essaye de parvenir au principe de l'inertie par la seule considération du mouvement relatif, sans faire appel à aucun système de référence : il y réussit, mais son énoncé est si compliqué et si prolixe qu'on ne pourrait se résoudre qu'avec peine à substituer à la formule simple de Newton une loi aussi obscure. Il est évident que la proposition de Mach tendant à considérer, au lieu de l'espace absolu, des axes définis par l'ensemble des masses de l'Univers, ou celle qui voudrait substituer l'éther à l'espace absolu, vont également toutes deux, de façon tout à fait différente, au-delà de l'expérience. La première se rattache en effet à nouveau à un concept idéal et transcendant, tandis que la seconde constitue une affirmation qui, certes, pourrait être soumise à la confirmation de l'expérience, mais ne l'a pas encore été. Une mécanique entièrement différente pourrait être valable pour l'éther, laquelle devrait être à la base de la loi d'inertie, mais n'y serait point soumise.

Une difficulté analogue se rencontre dans l'introduction du concept de temps, dont Newton fait également un absolu, lequel ne nous est jamais donné, tandis que nous enregistrons seulement l'uniformité de nombreux processus (rotation de la Terre, oscillations d'un pendule, indications d'un chronomètre). Mais l'accord de tous ces processus, en dépit de l'impossibilité d'en égaliser rigoureusement toutes les circonstances, est de nature à lever les doutes sur la notion de temps.

[1] [16], p. 255.

Une troisième difficulté concerne les concepts de masse et de force. On a depuis longtemps reconnu l'inanité de la définition newtonienne de la masse par la quantité de matière. D'autre part, la masse seule existe-t-elle et la force n'en est-elle qu'une propriété, ou inversement la force est-elle ce qui existe véritablement, ou encore doit-on admettre un dualisme de deux existences (masse et force), en sorte que la force serait, à part de la matière, une cause du mouvement de celle-ci ? A cela s'est ajoutée récemment la question de savoir si l'on doit souscrire à l'existence de l'énergie, ou si même celle-ci est seule à posséder une existence.

Kirchhoff refusa d'admettre que le rôle de la science fût d'élucider la véritable nature des phénomènes et d'en préciser les premières bases métaphysiques. Il réduisit la tâche de la science à la simple description des phénomènes. « Mais si l'on pénètre dans les voies et moyens, je dirais dans le mécanisme de notre pensée, on est conduit à contester la possibilité d'une semblable restriction [1]. »

Et Boltzmann expose ici, à propos de la mécanique, sa propre conception de la nature et de l'objet de toute théorie physique :

« Tous nos concepts et représentations ne sont en vérité que des images de notre pensée *(Gedankenbilder)*, que nous exprimons par des mots. La tâche de notre pensée est alors d'utiliser et de relier entre elles ces images, en sorte que grâce à celles-ci, nous puissions à tout moment réaliser le plus facilement possible des actes corrects, et en inviter d'autres à suivre cet exemple. *La métaphysique rejoint ici le point de vue le plus étroitement pratique :* les extrêmes se touchent. Les symboles conceptuels que nous formons n'ont d'existence qu'en nous et nous ne saurions évaluer les apparences extérieures à la mesure de nos propres représentations. Nous pouvons ainsi rejeter formellement des questions telles que celles-ci : La matière seule existe-t-elle et la force n'en est-elle qu'une propriété, ou la force existe-t-elle indépendamment de la matière, ou au contraire la matière est-elle une production de la force ? Ces questions n'ont aucune signification, car tous ces concepts ne sont que des images de pensée ayant pour objet de représenter correctement les phénomènes. Hertz a exprimé cela d'une façon particulièrement claire dans son célèbre ouvrage sur les principes de la mécanique ; mais il pose, comme première condition à remplir, que ces images doivent correspondre aux lois de la pensée [2]. »

Boltzmann discute cette exigence, qu'il entend ramener à de justes limites :

« Certes, nous devons apporter de riches trésors de lois de la pensée,

[1] [16], p. 257.
[2] *Ibid.*, pp. 257-258.

sans lesquelles l'expérience serait entièrement inutile, car nous ne saurions la fixer à l'aide d'images [1]. »

Mais ces lois mêmes se modifient sous l'effet du développement de nos connaissances. Elles ne sont pas les mêmes chez l'enfant, chez l'homme simple, chez le savant. Elles différaient « chez un peuple naïf comme les Grecs » et chez les scolastiques du moyen âge, et les esprits d'aujourd'hui ne reconnaissent plus les mêmes :

« *Je ne voudrais pas*, conclut Boltzmann, *reconnaître les lois de la pensée comme un juge suprême à suivre aveuglément.* Nous ne pouvons pas connaître les différentes modifications qu'elles auront à subir. Rappelons-nous seulement avec quelle certitude des enfants ou des ignorants sont persuadés qu'une simple sensation permet de distinguer le haut du bas en tout point du monde, ce qui les conduit à croire à l'impossibilité des antipodes. Si ces gens étaient logiques, ils tiendraient certainement cette impossibilité pour une loi *a priori* évidente de la pensée. De même, à l'origine, de multiples objections *a priori* furent élevées à l'égard de la doctrine de Copernic et l'histoire des sciences nous montre de nombreux exemples où tantôt on justifiait, tantôt on rejetait des propositions pour des raisons démonstratives que l'on tenait alors pour des lois évidentes de la pensée, tandis qu'aujourd'hui nous sommes convaincus de l'inanité de ces preuves [2]. »

C'est ainsi sous réserve de la possibilité d'une évolution future des lois de la pensée que nous pouvons soumettre à celles-ci les concepts des théories physiques :

« Je voudrais donc modifier l'exigence formulée par Hertz en ce sens que, dans la mesure où nous possédons des lois de la pensée que nous avons reconnues comme certainement valables pour les avoir sérieusement passées au crible de l'expérience, nous pouvons en premier lieu soumettre à l'épreuve de ces lois l'exactitude de nos images, étant entendu que la dernière et la seule décision quant à l'utilité de ces images résidera dans le fait que celles-ci représentent l'expérience de la façon la plus simple et la plus adéquate, et cela nous donnera une preuve nouvelle de l'exactitude des lois de la pensée. Si nous formulons de cette manière la tâche de la pensée en général et celle de la science en particulier, cela nous conduit à des conséquences qui peuvent paraître surprenantes au premier abord. Nous qualifierons de fausse une représentation de la nature, si elle traduit certains faits de façon inexacte, ou si de toute évidence il en est de plus simples qui représentent plus clairement les faits, ou si en particulier elle contredit des lois de la pensée

[1] [16], p. 258.
[2] *Ibid.*, pp. 258-259.

généralement établies ; il est toujours possible que certaines théories, qui représentent correctement un ensemble de faits, soient sur d'autres points inexactes, ce qui leur confère une vérité relative. Il est encore possible de construire de différentes façons un système d'images des phénomènes. Mais il est aléatoire, et cela est affaire de goût, de choisir celui qui nous paraît le plus simple, celui dont la représentation des phénomènes nous paraît la plus satisfaisante. *La science perd de ce fait son caractère d'unité.* Et cependant on tient pour assuré qu'il ne peut y avoir qu'une vérité et que, si les erreurs sont multiples, la vérité est unique. Cette opinion doit être combattue à notre point de vue actuel, bien qu'à vrai dire la différence entre ce point de vue et l'attitude traditionnelle soit seulement formelle. On n'a jamais cru que l'homme fût capable de connaître la substance entière de toute vérité. Cette connaissance n'est qu'un idéal. Nous possédons cependant un semblable idéal conforme à notre représentation d'aujourd'hui. C'est l'image la plus parfaite qui représente tous les phénomènes de la façon la plus simple et la plus adéquate. Selon le point de vue adopté, nous nous tournons de préférence soit vers l'idéal inaccessible, qui est unique, soit vers la multiplicité de ce qui est accessible.

» *Si nous avons la conviction que la science n'est qu'une image intérieure, une construction de l'esprit, qui ne recouvrira jamais la multiplicité des phénomènes et ne peut clairement représenter qu'une partie de ceux-ci, comment parviendrons-nous à une telle image ? Comment la présenter le plus systématiquement et le plus clairement possible* [1] *?* »

Suit l'exposé et la critique de ce que Boltzmann appelle la *méthode euclidienne*, c'est-à-dire la méthode axiomatique :

« On se plaisait autrefois à une méthode inspirée de celle qu'Euclide avait appliquée à la géométrie et que par suite je qualifierai d'euclidienne. Cette méthode part d'un nombre aussi réduit que possible de propositions, aussi évidentes que possible. Celles-ci étaient tenues, dans l'ancien temps, pour évidentes *a priori*, considérées comme données directement à l'esprit, et c'est pourquoi on les qualifiait d'axiomes. Plus tard, on devait au contraire leur donner purement le caractère de propositions expérimentales suffisamment garanties. De ces axiomes, et avec le seul secours des lois de la pensée, on déduisait comme nécessaires certaines images, et on pensait avoir ainsi démontré que ces images étaient les seules possibles et ne pouvaient être supplantées par d'autres. Citons, par exemple, les considérations qui servaient à établir soit la loi du parallélogramme des forces, soit la loi d'Ampère, ou la démonstration du fait que la force agissant entre deux points matériels doit avoir

[1] [16], pp. 259-260.

pour support la droite qui les joint et être une fonction de leur distance.

» Mais la force démonstrative de semblables considérations devait graduellement tomber en discrédit, le premier pas dans ce sens étant dû, comme nous l'avons déjà dit, à ce qu'on était passé d'une base évidente *a priori* à un simple fondement garanti par l'expérience. On réalisa encore que les déductions à partir d'une telle base n'étaient possibles que moyennant de nombreuses hypothèses nouvelles, et enfin Hertz devait montrer que, nommément dans le domaine de la physique, notre conviction en la justesse d'une théorie ne repose pas en réalité sur l'établissement de celle-ci selon la méthode euclidienne, mais bien davantage sur le fait que cette théorie conduit, dans tous les cas connus, à des conclusions exactes à l'égard des phénomènes. Il eut recours pour la première fois à ce point de vue dans son exposé des équations fondamentales de Maxwell en électromagnétisme, en proposant de ne pas se soucier de déduire celles-ci de principes déterminés, mais de les placer simplement en tête et d'en chercher la justification dans leur accord complet avec l'expérience. *Cet accord est en dernière analyse le seul juge de l'utilité d'une théorie et sa sentence est inébranlable et sans appel.* En fait, si nous examinons de plus près les théorèmes fondamentaux qui se rattachent immédiatement à notre propos : loi d'inertie, loi du parallélogramme des forces et autres propositions fondamentales de la mécanique, nous ne trouvons pas et de loin aussi convaincantes les différentes démonstrations qui sont données de chacune d'elles dans tous les traités de mécanique. que le fait que toutes les conséquences tirées du contenu de ces propositions ont été si remarquablement confirmées par l'expérience [1]. »

Les théories, ou les images, car pour Boltzmann toute théorie est image, *Bild*, au sens abstrait et large du terme, ont été graduellement construites, soit comme la thermodynamique par l'action conjuguée de nombreux chercheurs, soit parfois grâce au génie d'un seul chercheur, soit encore retrouvées par les voies les plus détournées et placées sous un jour nouveau, comme la théorie électromagnétique de Maxwell.

Comment les exposer ? Boltzmann définit ainsi la *méthode déductive* :

« [Cette méthode d'exposition] consiste, en nous souvenant de notre tâche de ne construire que de simples images mentales, à opérer exclusivement dès l'origine à l'aide d'abstractions. Nous n'avons donc égard à aucun fait d'expérience. Nous nous efforçons uniquement de développer nos *Gedankenbilder* de la façon la plus claire et d'en tirer toutes les conséquences possibles. Ce n'est qu'ensuite, après avoir achevé l'exposition de l'image, que nous en vérifierons l'accord avec les faits : nous

[1] [16], pp. 260-261.

ne justifions donc qu'après coup les raisons qui nous avaient fait choisir l'image précisément ainsi et non autrement, et sur lesquelles nous n'avions donné auparavant aucune indication... [Cette méthode présente l'avantage] de ne laisser aucun doute sur le fait qu'elle ne concerne pas les objets, mais offre seulement une image mentale et que sa seule tâche est de façonner cette image en une habile désignation des phénomènes... Il est extrêmement facile de la développer d'une façon claire et exempte de toute contradiction... *La clarté souffrirait d'un mélange prématuré avec l'expérience*, et le mode d'exposé déductif évite cet écueil de la façon la plus sûre. En revanche, le caractère arbitraire des images y ressort d'autant plus vivement que l'on commence par des constructions mentales entièrement libres, dont on ne justifie pas la nécessité à l'origine, se bornant à vérifier celle-ci après coup. On ne donne par suite aucune ombre de démonstration du fait que d'autres modèles ne pourraient être aussi imaginés, qui seraient également vérifiés par l'expérience. Cela semble un défaut, mais c'est peut-être un avantage, du moins aux yeux de qui partage l'avis exprimé plus haut quant à la nature de toute théorie. Au contraire, un défaut réel de la méthode déductive réside en ce que le chemin n'est pas visible, par lequel on a pu découvrir l'image en jeu. Mais il est une règle dans le domaine de l'enseignement scientifique, c'est que la logique des déductions se détache d'autant plus nettement que l'on replace celles-ci le plus possible dans leur ordre naturel, sans égard aux voies souvent détournées par lesquelles on y est parvenu [1]. »

La mécanique de Hertz offre l'exemple d'un exposé conforme à la méthode déductive qui vient d'être exposée.

Hertz lui-même a pu s'inspirer de Kirchhoff. Nous savons déjà que celui-ci entendait borner la mécanique à n'être plus qu'une simple description des mouvements, fondée sur la considération de points matériels et d'équations différentielles. Il ne parvenait pas à bannir entièrement la force dans son vocabulaire ; mais celle-ci n'était plus à ses yeux que la notation abrégée d'une expression algébrique. La réforme qu'il proposait était ainsi *purement formelle* et n'apportait à la mécanique aucune modification véritable [2].

« Hertz, déclare Boltzmann, devait aller beaucoup plus loin, et tandis que la plupart des auteurs postérieurs ont plus ou moins imité le mode d'exposition de Kirchhoff, en suivant d'ailleurs beaucoup plus ses expressions que le fond même de sa pensée, j'ai souvent entendu louer la mécanique de Hertz, mais je n'ai encore vu personne suivre la voie qu'il avait ouverte.

[1] [16], pp. 261-262.

[2] Poincaré devait déclarer, dans *Science et Hypothèse*, [3], que Kirchhoff semblait n'avoir fait qu'obéir à la tendance générale des mathématiciens au nominalisme.

» A ma connaissance, personne n'a fait la remarque que si l'on pousse dans ses dernières conséquences la pensée de Kirchhoff, on est directement conduit aux idées de Hertz. Kirchhoff ne définit en effet le concept le plus important de la mécanique, savoir la masse, que lorsqu'il existe entre les points matériels des équations de condition. On aperçoit clairement, dans ce cas, la nécessité du coefficient qui définit la masse selon Kirchhoff. Dans les autres cas où les points matériels se meuvent sans être liés par des équations de condition, comme par exemple en aérodynamique, le concept de masse au sens de Kirchhoff *schwebt in der Luft* et l'obscurité qui en résulte ne disparaît complètement que si on élimine entièrement ces cas [1]. »

Les forces les plus importantes de l'ancienne mécanique étaient des actions à distance entre points matériels. Kirchhoff écarte de la science la considération de la cause métaphysique de telles actions, mais il continue à admettre l'existence de mouvements se produisant précisément suivant les mêmes lois, comme si les actions à distance elles-mêmes subsistaient.

Au contraire, Hertz rejette tout mouvement ayant lieu comme l'exigeaient les anciennes forces à distance, et admet seulement les mouvements répondant à des conditions qu'il spécifie mathématiquement :

« Il part de points matériels qu'il considère comme de simples images de pensée. Il définit aussi la masse, indépendamment de toute expérience, comme un nombre que nous devons associer à chaque point, savoir le nombre de simples points de masse *(Massenpunkte)* qu'il contient. A l'aide de ces concepts abstraits, il construit en premier lieu une notion du mouvement, qui est également une pure construction mentale. *Le concept de force disparaît entièrement.* A la place interviennent certaines conditions qui s'écrivent sous forme de relations entre les différentielles des coordonnées des points matériels. Ceux-ci sont alors dotés de vitesses initiales données et se meuvent à tout instant ultérieur suivant une loi très simple, qui dès lors que les équations de conditions sont données, déterminent univoquement le mouvement pour tout instant ultérieur. Hertz exprime cette loi en disant que la somme des masses multipliées par les carrés des écarts des différents points matériels par rapport au mouvement rectiligne et uniforme doit être minimum à chaque instant, ou plus brièvement que le mouvement a lieu suivant les trajectoires les plus droites possibles. Cette loi a une grande analogie avec le principe de la moindre contrainte de Gauss ; elle est, dans une certaine mesure, le cas particulier qui intervient lorsqu'on applique ce principe à un

[1] [14], p. 213.

système de points qui sont soumis à une contrainte à l'exclusion de toute autre force extérieure [1]. »

« Ainsi Hertz entreprit-il, beaucoup plus sérieusement que Kirchhoff, de dompter la force. Il créa de cette manière un système de mécanique extrêmement simple, ne procédant que d'un nombre très réduit de principes s'offrant dans une certaine mesure logiquement d'eux-mêmes. Hélas, au même moment, sa voix s'éteignait pour toujours, laissant sans réponse des milliers de questions qui, certainement, ne se posent pas seulement sur mes propres lèvres. »

Hertz, ayant ainsi éliminé la force, est obligé de faire appel à des masses cachées, animées de mouvements cachés.

« Mais comment, demande Boltzmann, imaginer dans chaque cas ces masses cachées ? Est-il toujours possible de parvenir au but par leur intermédiaire ?... Déjà, dans un exemple mécanique très simple, je fus incapable de déterminer les masses cachées et je posai le problème à la *Naturgesellschaft* ; or, dès l'instant où, dans les cas les plus simples, on ne trouve soit aucun système, soit seulement un système beaucoup trop compliqué de masses cachées pour résoudre le problème au sens de la théorie de Hertz, la valeur de celle-ci devient purement académique.

» La mécanique de Hertz m'apparaît par suite plutôt comme un programme pour le lointain avenir. Lorsqu'on sera parvenu à expliquer tous les processus de la nature par des mouvements cachés au sens de Hertz et cela d'une façon qui ne soit pas trop artificielle, la vieille mécanique cédera le pas à celle de Hertz. D'ici là, la mécanique classique apparaît comme la seule qui soit capable d'expliquer clairement les phénomènes, sans aller chercher des objets qui non seulement sont cachés, mais dont on ne soupçonne pas comment il convient de les imaginer [2]. »

Boltzmann rappelle qu'il a lui-même tenté de donner, dans ses *Vorlesungen über die Principe der Mechanik*, un exposé purement déductif des principes fondamentaux de la mécanique, mais cela en se rattachant beaucoup plus étroitement au traitement habituel de la mécanique [3] :

« Je pars, comme Hertz, de simples êtres de raison qui sont des points matériels. Je détermine leur position dans un système d'axes rectangulaires également imaginé, et je construis de la façon suivante une image

[1] [16], p. 263.

[2] [14], pp. 214-215. Le jugement de Boltzmann sur la mécanique de Hertz coïncide de façon frappante avec celui que Duhem devait émettre dans l'*Evolution de la Mécanique* (1903), [1]. Pour Duhem également, faute d'avoir été appliquée jusqu'au bout à des problèmes précis, et suivie jusqu'à la détermination des masses et des mouvements cachés pour remplacer toute force, la mécanique de Hertz est moins une doctrine que le programme d'une doctrine.

[3] Voir plus loin, pp. 61 et suiv.

mentale du mouvement de ces points. Chaque fois que deux points matériels se trouvent à une distance r l'un de l'autre, chacun d'eux doit recevoir une accélération dans la direction de r, qui est une fonction $f(r)$ de la distance, laquelle pourra être spécifiée arbitrairement plus tard. En outre, les accélérations de deux points devront à tout instant demeurer dans un rapport invariable, qui définit le rapport des masses des deux points. Quant au mouvement de l'ensemble de tous les points matériels, nous l'imaginons de telle sorte qu'il soit spécifié de façon unique par la condition que l'accélération de chaque point soit la somme géométrique des accélérations résultant de la règle précédente [où deux points étaient seuls en jeu] et qu'elle se compose avec la vitesse déjà acquise par le point. Je ne discuterai pas davantage l'origine de ces accélérations ni la raison pour laquelle je prescris de construire ainsi le modèle. Il suffit que l'image soit parfaitement claire et puisse être explicitée en détail par le calcul dans un nombre suffisant de cas. L'image trouve sa justification principalement dans le fait que la fonction $f(r)$ se laisse spécifier dans tous les cas de manière que le mouvement imaginé des points matériels fictifs se transforme en une copie fidèle des phénomènes réels [1]. »

De semblables exposés purement déductifs ne résolvent pas la question de la nature de la matière, de la masse ou de la force, mais tournent cette question en rendant inutile de la poser. Ces concepts se traduisent ici par des nombres bien déterminés et par des assignations en vue de constructions géométriques conçues en vue d'obtenir une image utilisable du monde des phénomènes.

« Nous ne considérons pas comme une tâche de la science de rechercher la véritable cause pour laquelle le monde des phénomènes se conduit exactement ainsi et non autrement, ni ce qui est caché dans une certaine mesure derrière le monde des phénomènes et le pousse [2]. »

La méthode déductive ne résout pas davantage la question de l'espace absolu et du mouvement absolu. Le système de référence que nous avons imaginé est simplement l'un des éléments de notre image mentale, ni plus ni moins abstrait que les points matériels qui s'y meuvent. C'est la comparaison avec l'expérience qui nous montrera qu'un système de référence lié au ciel des étoiles fixes garantit l'accord avec les phénomènes. Il nous faudra ensuite démontrer, à partir de notre image elle-même, que rien n'est changé si nous introduisons d'autres systèmes de référence arbitraires en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au premier système que nous avons imaginé.

Boltzmann se défend d'avoir, en présentant son modèle, voulu attaquer celui de Hertz :

« Classen a interprété mon exposé comme une polémique contre Hertz et donné à entendre que je me serais imaginé avoir apporté quelque chose d'absolument supérieur à l'exposé de Hertz. Rien moins que cela. Je reconnais sans réserve les avantages de l'image de Hertz, mais selon le principe qu'il est possible et même souhaitable d'établir plusieurs images d'un seul et même groupe de phénomènes, je pense que mon modèle possède encore une signification à côté de celui de Hertz et qu'il présente certains avantages qui manquent à celui de Hertz. Les principes de la mécanique établis par Hertz sont d'une extraordinaire simplicité et beauté. Ils ne sont naturellement pas tout à fait exempts d'arbitraire, mais je dirais volontiers que l'arbitraire y est réduit au minimum. Le modèle construit par Hertz indépendamment de l'expérience possède une perfection et une évidence certaines : il ne contient que peu d'éléments arbitraires. Au contraire, mon modèle est de toute évidence très inférieur à cet égard. Il contient beaucoup plus de traits qui portent la marque de n'avoir pas été définis par nécessité interne, mais d'avoir été simplement introduits pour rendre possible plus tard l'accord avec l'expérience. Il renferme aussi une fonction arbitraire et aux multiples images qui interviennent lorsqu'on donne à cette fonction toutes les formes possibles correspondent seulement très peu de processus réels. Tandis qu'on voit aussitôt dans le modèle de Hertz que si quelques autres images sont possibles, il n'y en a que peu qui puissent prétendre à une telle simplicité et à une telle perfection interne, mon modèle évoque aussitôt l'idée qu'il peut y en avoir encore beaucoup d'autres qui représentent les phénomènes avec la même perfection. Cependant, sur certains points, mon modèle est préférable à celui de Hertz. Certes, Hertz peut expliquer directement quelques phénomènes à partir de son modèle, ou mieux les représenter à l'aide de celui-ci, comme le mouvement d'un point matériel sur une courbe ou sur une surface donnée, ou la rotation d'un solide autour d'un point fixe, étant entendu dans les deux cas qu'aucune force extérieure n'agit. Mais on tombe sur des difficultés aussitôt que l'on veut représenter les processus les plus courants de l'expérience quotidienne en présence de forces. Considérons, en premier lieu, l'une des forces les plus générales et les plus importantes de la nature, la gravitation. Nous ne pouvons naturellement, du point de vue de Hertz, la concevoir comme une action à distance. De nombreuses tentatives ont été faites pour expliquer mécaniquement la gravitation par l'action d'un milieu. Mais aucune d'entre elles n'a conduit à un résultat bien défini et concluant. L'une des plus connues est la théorie des chocs moléculaires établie par Lesage, et reprise plus tard par Lord Kelvin, Isenkrabe et

d'autres. Celle-ci, abstraction faite de ce qu'on doute encore de pouvoir la poursuivre exactement, est inutilisable en théorie de Hertz, car l'explication d'un seul choc élastique y offre, comme nous le verrons, les mêmes difficultés. On devrait donc créer une théorie entièrement nouvelle, expliquer l'action de la gravitation par des tourbillons, des pulsations ou autres moyens, tandis que les particules du milieu correspondant devraient être liées, non par des forces au sens traditionnel, mais seulement par des équations de conditions de la forme introduite par Hertz. Et même si l'on devait réussir, cela voudrait dire que l'on s'attache à une image entièrement arbitraire laquelle, selon toute probabilité, devrait être remplacée par la suite par un modèle entièrement différent. Le grief que fait Hertz à l'ancienne mécanique de donner une image beaucoup trop étendue, en ce sens que de toutes les fonctions $f(r)$ représentant la force très peu ont une application pratique, se laisse retourner *a fortiori* contre sa propre image, quand on veut l'appliquer à un cas précis. Rien que dans l'application à la gravitation on doit choisir un milieu parmi tous ceux qui sont susceptibles de transmettre une action à distance, ce qui est beaucoup plus indéterminé et beaucoup plus arbitraire que le choix d'une fonction $f(r)$ déterminée.

» Il est bien connu que Maxwell a expliqué avec succès, dans ses premiers travaux, les forces électriques et magnétiques par l'action d'un milieu. Mais abstraction faite de ce que ce milieu avait une structure extrêmement compliquée et était rempli de propriétés arbitraires d'un caractère essentiellement provisoire, il était inutilisable en théorie de Hertz, car ses parties étaient retenues par des forces au sens traditionnel de la mécanique. Les propriétés des corps élastiques, liquides et gazeux devraient aussi faire l'objet de nouvelles images, car toutes celles qui ont été proposées jusqu'ici reposent sur l'hypothèse de forces agissant entre les particules. On n'a donc plus que le choix de laisser indéterminée et arbitraire la nature du mécanisme qui doit créer la gravitation ou les phénomènes électriques et magnétiques. Il en résulte une inacceptable ambiguïté, car on est obligé d'opérer toujours avec des équations dont on ne connaît que les propriétés générales ; ou alors on s'efforce de choisir un mécanisme particulier et on retombe à nouveau sur autant d'arbitraire et de difficultés [1]. »

Boltzmann entend encore montrer, sur un exemple beaucoup plus simple, les difficultés auxquelles on se heurte déjà dans les cas les plus triviaux lorsqu'on cherche à appliquer la loi fondamentale de Hertz :

« Soient trois masses m_1, u et m_2 avec la condition qu'aussi bien la distance m_1u que la distance um_2 soient constamment égales à a. Si nous

[1] [16], pp. 266-268.

laissons la masse u devenir de plus en plus petite, nous obtenons un cas correspondant parfaitement à l'esprit de la mécanique de Hertz et qui nous donne une image fidèle du processus suivant de la nature : dans une sphère creuse élastique de masse m_2 se meut une petite sphère élastique pleine, la différence des rayons étant $2a$. Nous avons ici l'exemple d'un seul et même processus naturel, qui peut être expliqué de deux façons différentes, d'une part par la théorie moléculaire, d'autre part par la mécanique de Hertz. Mais il n'en va pas de même pour tous les processus. Déjà le cas entièrement trivial du choc de deux sphères élastiques pleines ne peut être traité dans le schéma de Hertz que moyennant des mécanismes assez arbitrairement choisis ou des hypothèses compliquées sur un milieu intermédiaire, car la méthode de Hertz exclut les inégalités. Cette méthode conduit ainsi, dans les cas les plus simples, aux plus grandes complications [1]. »

Boltzmann se défend une fois de plus de contester la haute valeur du modèle de Hertz, laquelle réside dans la simplicité logique de ses principes :

« Il serait sans doute possible que, dans le grand avenir, on parvienne à expliquer toutes les actions par des milieux dont les propriétés ne seraient pas choisies de façon fantaisiste, mais au contraire dictées par la nature même du sujet d'une façon directe et univoque. Il serait possible que les particules de ces milieux n'exercent pas les unes sur les autres de forces au sens de l'ancienne mécanique, mais qu'il suffise de conditions au sens de Hertz entre les coordonnées de ces particules. A ce moment, la mécanique de Hertz aurait indiscutablement remporté la victoire et tous les autres modes d'exposition n'auraient plus qu'un intérêt historique. Que l'on tienne pour probable ou non l'accomplissement d'une telle prophétie est une pure affaire de sentiment. La possibilité d'un tel développement de notre connaissance n'a pas encore été démontrée. Nous regarderons donc avec admiration cet idéal à partir de notre point de vue actuel, et nous contribuerons à en accélérer l'approche. Mais entre temps nous ne pourrons nous passer, à côté de celle de Hertz, d'images simples et immédiatement utilisables qui se laissent déjà poursuivre dans le détail [2]. »

Dans sa seconde leçon à la Clark University, Boltzmann se tourne, et c'est là sans doute la partie la plus originale et la plus intéressante de toute cette discussion, vers une méthode toute différente d'exposé des principes de la mécanique, qu'il qualifie de *méthode inductive*.

Cette méthode part immédiatement des faits d'expérience, tels qu'ils

[1] [16], pp. 268-269.
[2] *Ibid.*, p. 269.

apparaissent à une observation impartiale, et n'introduit chaque élément abstrait que lorsqu'il devient impossible de s'en passer. Ainsi rattachée à des données immédiates et courantes, cette méthode laisse reconnaître comment et pourquoi naissent les images abstraites, que la méthode déductive posait au contraire dès l'origine d'une façon entièrement indépendante, en principe, des faits d'expérience.

Les exposés traditionnels de la mécanique mélangeaient les deux méthodes au détriment de la clarté. C'est ainsi que l'on y définissait le point matériel comme un corps si petit que son étendue peut être négligée. On entendait par là que son moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre de gravité s'évanouit devant son moment d'inertie par rapport à un autre axe éloigné de ce centre d'une distance d'un ordre de grandeur habituel dans nos expériences. « Mais, dit Boltzmann, comme le concept de moment d'inertie et celui de centre de gravité n'avaient pas encore été développés, j'ignorais ce que l'on doit entendre par un corps dont une propriété des plus importantes, savoir l'étendue, peut être négligée [1]. » De même, la masse était souvent définie par l'intermédiaire de l'action d'une seule et même force sur différents corps, mais comment peut-on constater que la force est la même quand elle agit tantôt sur un corps, tantôt sur un autre ?

D'où la nécessité « d'esquisser encore *un nouvel exposé purement inductif* des principes de la mécanique, du moins en quelques traits. Nous demeurons ainsi fidèle au principe selon lequel nous n'aspirons provisoirement, en aucune façon, à donner le meilleur exposé de la science, mais considérons comme utile d'essayer le plus possible d'exposés différents, dont chacun a ses avantages particuliers, mais à vrai dire aussi ses lacunes. L'attention essentielle doit être orientée à proscrire toutes les inconséquences et fautes de logique, à ne laisser passer sous silence aucun concept ou aucune supposition, mais au contraire à souligner toutes les hypothèses faites, avec la plus grande clarté... Nous ne pourrons éviter entièrement les concepts abstraits de point matériel, de masse, de force, etc... dont nous étions partis précédemment, car ce sont les piliers sur lesquels la mécanique est bâtie, mais nous les introduirons aussi tard que possible, et tandis qu'auparavant nous les postulions, nous nous rattacherons aussi étroitement que possible à l'expérience dont nous essayerons de déduire nos résultats [2]. »

Il en résulte nécessairement une interversion de l'ordre des idées :

« Les lois mêmes qui auparavant nous paraissaient les plus simples ne sont plus à poser les premières, comme par exemple la loi d'inertie.

On exprime habituellement celle-ci en disant qu'un point matériel qui est soustrait à toute influence extérieure se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme. Abstraction faite de la difficulté qui réside dans la définition du point matériel, nous ne pouvons éloigner suffisamment un corps de tous les autres pour le soustraire à toute influence, et si cela était possible, nous ne pourrions plus observer son mouvement, sans même parler d'en constater la rectilignité et l'uniformité. Pour vérifier d'autre part la loi d'inertie sur des corps lorsque toutes les forces qui agissent sur eux sont en équilibre, on devrait déjà disposer en totalité de la science de l'équilibre. On cultive ainsi dans les exposés habituels de multiples mélanges d'abstractions et de faits d'expérience, que notre tâche principale sera d'éviter dans ce qui suit, où nous nous proposons de partir rigoureusement de purs faits d'expérience [1]. »

Mais la chose n'est possible qu'en généralisant et idéalisant les faits constatés :

« Auparavant — c'est-à-dire dans l'exposé déductif — nous n'avions affaire dans l'établissement des premiers principes qu'à un matériel abstrait que nous pouvions former à notre idée, comme nous voulions, et dont nous pouvions demander qu'il satisfasse toujours exactement à nos exigences ; maintenant, au contraire, nous voulons partir des phénomènes directement observés, qui sont toujours composés et compliqués. Si donc nous voulons en tirer des principes généraux, nous devrons toujours généraliser et idéaliser les phénomènes, en sorte que nous n'ayons déjà plus devant nous des faits entièrement précis, mais des processus qui ne sont réalisés dans la nature qu'avec une plus ou moins grande approximation. Nous ne pouvons donc éviter entièrement de mêler des représentations aux faits, mais nous essayerons de le faire du moins dans la plus faible mesure possible et nous nous efforcerons de ne pas le faire à la sauvette, mais de garder clairement conscience de la nécessité où nous sommes [2]. »

Parmi les phénomènes extraordinairement variés qui sont à notre disposition, le plus simple consiste dans le changement de lieu d'un corps, lequel ne semble modifier d'aucune manière sa structure, ni ses autres propriétés. « Déjà ce simple phénomène est à certains égards une idéalisation. Dans les cas les plus restreints, le corps ne change absolument pas de structure ; mais tous les corps, même les corps invariables, peuvent se briser sous des forces très grandes et être conduits à un changement complet de leurs propriétés par la chaleur et par des actions chimiques. Mais il existe beaucoup de corps dont la structure ne change

[1] [16], p. 272.
[2] *Ibid.*, pp. 272-273.

pas de façon perceptible en un temps très long au cours des mouvements les plus variés. Nous les appelons des corps solides et nous formons *l'idéal d'un corps absolument invariable, que nous appelons un solide rigide* [1]. »

On peut ramener le cas des fluides à celui des solides en admettant qu'ils se composent de très petites parties dont les mouvements, indépendants les uns des autres, appellent un changement de structure, dont le plus simple est un changement de volume. La question se pose alors de savoir si le nombre des particules qui composent un fluide doit être tenu pour mathématiquement infini, ou seulement très grand, mais fini. Boltzmann ne cache pas sa sympathie pour cette seconde hypothèse : « Beaucoup de phénomènes donnent à penser que c'est la seconde hypothèse qui doit être faite, laquelle est aussi philosophiquement la plus satisfaisante. Mais comme aucune confirmation expérimentale certaine n'en a pu être donnée jusqu'ici, nous laisserons, conformément aux principes que nous nous proposons de suivre, la question entièrement *in suspenso* [2]. »

La mécanique, science des phénomènes du mouvement, peut-elle s'étendre au son, à la chaleur, à la lumière, aux phénomènes électriques et magnétiques, aux actions chimiques et physiologiques ? Boltzmann refuse ici de trancher la question et note seulement que la mécanique conserve le pas sur toutes les théories physiques, comme science des phénomènes les plus simples, sans laquelle il serait impossible d'en imaginer d'autres.

Revenons donc, en laissant de côté la possibilité d'une explication mécanique de tous les phénomènes de la nature, au mouvement d'un corps solide K, que nous idéalisons en l'imaginant comme absolument rigide et qui nous est donné sous l'apparence d'une étendue continue.

Marquons sur le corps K de très petits endroits A, B, C ... que nous matérialisons par des marques très fines, par l'intersection de lignes très déliées, par la perforation de trous très fins, etc. Une nouvelle idéalisation est nécessaire pour imaginer ces marques comme des *points mathématiques*. Grâce à ces points, nous pouvons spécifier de la façon la plus précise ce que nous entendons quand nous disons que la structure d'un corps ne change pas pendant son mouvement : « Nous pouvons mesurer par l'intermédiaire d'une règle ou de deux pointes de compas que nous replaçons ensuite sur une règle la distance de deux points arbitraires du corps K, c'est-à-dire de deux marques arbitraires tracées sur ce corps. Si cette distance demeure invariable à tout instant pour toutes les paires

de points, nous disons que la structure du corps est invariable. Nous n'avons à vrai dire aucune garantie objective de l'invariabilité de la règle ou du compas, mais seulement la garantie empirique qu'ils nous donnent des indications correctes pour tous les corps qui, à vue, ne changent pas de structure. Si tous les corps solides venaient à changer de la même manière leurs dimensions avec le temps, nous ne pourrions naturellement pas nous en apercevoir. Nous n'avons absolument pas l'intention d'expliquer comment il existe des corps solides, et comment nous pouvons mesurer la distance des marques qui leur sont rigidement liées. Nous prenons la chose comme fait d'expérience et nous ne mettons dans nos représentations que les lois du changement de distance des marques de différents corps, ou du même corps [1]. »

Boltzmann admet ici, comme condition préalable à toute connaissance scientifique, le principe de détermination univoque des processus de la nature soit, dans le cas particulier de la mécanique, de la *détermination univoque de tous les mouvements*. Sans quoi nous ne pourrions qu'assister avec curiosité au cours des phénomènes.

Mais ici se présente une difficulté, car les circonstances sous lesquelles a lieu le mouvement d'un corps comprennent, au sens strict, tout l'Univers, lequel n'est jamais deux fois dans le même état. Il faut donc se restreindre et dégager par l'expérience le concept d'un « *voisinage* » exerçant une influence sur le mouvement d'un corps, sans pouvoir en cela, si l'on veut demeurer fidèle aux principes de la méthode inductive, adopter purement et simplement la *Nahewirkungstheorie* (théorie des actions de contact), selon laquelle seuls les éléments de volume immédiatement voisins déterminent le mouvement d'un élément de volume quelconque. Si naturelle que cette théorie apparaisse à beaucoup d'esprits, elle déborde cependant le simple domaine des faits et ne peut être prise comme base de l'édifice de la mécanique.

Provisoirement du moins, nous compterons la Terre comme faisant partie du voisinage d'un corps pesant, en laissant de côté la Lune et les astres, qui n'exercent aucune influence perceptible.

Les pointes de compas que nous pouvons placer sur les corps matériels pour les arpenter ne donnent aucune mesure de l'espace absolu : nous ne pouvons pas davantage, comme dans la méthode déductive, imaginer un système de référence se substituant aux solides matériels que nous considérons désormais exclusivement. Nous devons, dans l'esprit de la méthode inductive, nous rattacher bien davantage au processus historique du développement de la mécanique :

« Galilée a trouvé les lois simples du mouvement en étudiant le mou-

[1] [16], p. 276.

vement relatif par rapport à la Terre. Suivant son exemple, nous devons encore considérer, en dehors du corps K dont nous voulons décrire le mouvement, un système d'autres corps satisfaisant à la condition que les distances mutuelles entre leurs points ne changent pas, c'est-à-dire qui soient tous *en repos relatif*. C'est ce système de corps que nous appelons système de référence. Si donc nous étudions le mouvement d'un corps solide par rapport à un système de référence et si A, B, C ... sont des points marqués sur le premier et EFG ... des points marqués [liés] au second, les distances AB, AC ... ne changent pas, ni les distances EF, EG ... et notre tâche est seulement d'établir les lois de variation des distances AE, AF, BE ... Naturellement, ici encore, beaucoup d'idéalisations sont nécessaires. Nous ne pourrons trouver aucun système de corps servant de référence qui soient ainsi faits que leur position relative se conserve absolument et indéfiniment. Il nous suffit que cette condition soit remplie approximativement pendant une durée suffisamment longue [1]. »

En outre, rien ne garantit que nous obtiendrons les mêmes lois du mouvement, quel que soit le système de référence choisi :

« Nous aurons en tout cas à choisir un système tel que nous obtenions des lois de mouvement simples. Il se révèle en fait que les lois obtenues en choisissant comme système de référence le ciel des fixes ne peuvent, sans de petites corrections, être appliquées au mouvement par rapport à la Terre, et l'on doit considérer comme un heureux hasard pour le développement de la mécanique le fait que l'influence de la rotation de la Terre sur les mouvements que nous pouvons observer à sa surface soit si extraordinairement petite. Il aurait été sans cela beaucoup plus difficile d'obtenir les lois fondamentales de la mécanique [2]. C'est à cette circonstance que l'on doit de pouvoir choisir la Terre comme système de référence des mouvements à sa surface. Nous obtenons par ce moyen des lois simples, que les véritables mouvements ne suivent pas avec une approximation absolue, mais les écarts sont si faibles qu'ils échappent presque à l'observation. Cela, nous ne pouvions pas le savoir *a priori* ; mais il n'y a aucune faute de logique à étudier en premier lieu les lois du mouvement relatif par rapport à la Terre. Si nous trouvons des lois simples, il n'y a pas davantage de faute de logique à les essayer au mouvement des planètes par rapport au système des étoiles fixes... Les corrections [correspondantes] sont si faibles qu'elles ne nous gênaient pas lorsque nous recherchions les lois à partir des mouvements terrestres ; mais maintenant que nous avons appris à connaître leur ordre de gran-

[1] [16], pp. 278-279.

[2] Historiquement, cette observation est fort juste, car on sait que la dynamique de Galilée était exclusivement terrestre.

deur, elles apparaissent toutefois comme observables à l'aide de moyens suffisamment fins. Que les mouvements véritables révèlent exactement les particularités conditionnées par ces corrections confirme *a posteriori* notre méthode de façon éclatante [1]. »

Boltzmann considère que la méthode inductive ainsi entendue écarte les difficultés pédagogiques créées par la relativité de tous les mouvements.

Pour rendre plus maniable le système de référence, il n'y a aucune difficulté à imaginer les corps utilisés pour constituer ce système comme liés à trois axes rectangulaires et à déterminer à chaque instant la situation de chaque point du corps K dont on étudie le mouvement par ses coordonnées dans les axes ainsi choisis. Si ces coordonnées demeurent invariantes, le corps K est au repos relatif par rapport au système de référence. Si elles changent, le corps K est en mouvement et il est nécessaire, pour décrire ce mouvement, de fixer d'une façon précise une mesure du temps :

« Nous devons, avant tout, nous procurer une série de processus pour lesquels nous avons une garantie parfaite, ou plutôt une garantie possible qu'ils s'exécutent en des temps égaux. Nous pouvons ainsi laisser tomber des corps exactement égaux dans les mêmes circonstances, ou écarter de la même quantité des pendules exactement égaux. Quand le premier atteint le repos, laissons le second commencer son mouvement, etc... Seule la comparaison de différents essais analogues peut nous montrer si nous avons suffisamment évité les perturbations réciproques. Nous voyons naturellement bientôt qu'un pendule accomplit des oscillations consécutives approximativement dans les mêmes circonstances, ce qui nous permet d'utiliser ces oscillations pour la mesure du temps. A vrai dire, l'isochronisme absolu des oscillations est encore un idéal ; la température, la pression, le Soleil et la Lune ont une influence, mais il n'entre pas dans le cadre des considérations générales que nous développons ici d'expliquer comment toutes ces circonstances perturbatrices peuvent être évitées dans toute la mesure du possible avec des chronomètres bien faits, comment à l'aide d'une force motrice les oscillations peuvent être entretenues très longtemps et quand un chronomètre est finalement inutilisable, comment on peut lui en substituer un autre autant que possible identique [2]. »

Boltzmann montre comment les durées peuvent être indéfiniment subdivisées et souligne que « nous tirons notre unité habituelle du temps de la rotation de la Terre, dont l'uniformité sera contrôlée par déduction des principes de la mécanique, ou mieux encore à l'aide de processus

[1] [16], pp. 279-280.
[2] *Ibid.*, pp. 280-281.

simples, car sans la connaissance des lois de la mécanique il n'est pas évident que la vitesse de rotation demeure la même en tous les points de la trajectoire de la Terre[1]. »

Revenant alors au corps K, nous exprimons les coordonnées x, y, z d'un point A de ce corps par les fonctions :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \chi(t) \qquad z = \psi(t).$$

On peut admettre comme un fait d'expérience la continuité des fonctions φ, χ et ψ. Leur dérivabilité n'en résulte pas, comme on le sait depuis Weierstrass, mais on peut cependant l'admettre par hypothèse, ce qui exclut les oscillations très rapides et l'agitation thermique des molécules, qui serait mieux représentée par une fonction analogue à celle de Weierstrass que par une fonction dérivable.

Boltzmann définit encore la vitesse, puis l'accélération. Ces concepts étant acquis en liaison aussi étroite que possible avec l'expérience, il convient de passer aux lois du mouvement des corps. On ne peut commencer par le mouvement d'un point matériel, car celui-ci est une pure abstraction.

Mais ici Boltzmann dénonce l'illusion phénoménologique, que nous le verrons condamner si souvent, et selon laquelle on pourrait se passer d'abstractions dans la description des faits d'expérience :

« A mon avis, nous ne pouvons prononcer une seule phrase qui traduise en réalité un pur fait d'expérience. Les mots les plus simples comme jaune, doux, amer, etc., qui semblent n'indiquer que de simples sensations, expriment déjà des concepts qui ont été formés par abstraction à partir de multiples faits d'expérience. Lorsque Gœthe dit que l'expérience n'est qu'à moitié expérience, il entend certainement exprimer par cette formule d'apparence paradoxale que toute interprétation conceptuelle de l'expérience ou toute traduction de celle-ci par des mots nous oblige déjà à aller au-delà de l'expérience. L'exigence souvent formulée que la science n'aille pas au-delà de l'expérience devrait à mon avis s'exprimer ainsi : ne pas aller trop loin au-delà de l'expérience et n'introduire que des abstractions telles qu'on puisse les soumettre bientôt à nouveau au contrôle de l'expérience[2]. »

Cela nous interdit de poser en premier lieu la loi d'inertie :

« Celle-ci peut être théoriquement la loi la plus simple de la mécanique, physiquement elle n'est en aucune façon la plus simple, car elle suppose toute une série d'abstractions sur lesquelles j'ai déjà appelé l'attention plus haut. Les deux cas physiquement les plus simples appa-

[1] [16], p. 281.
[2] *Ibid.*, p. 286.

raissent être bien davantage le repos relatif d'une part, la chute libre d'un corps pesant d'autre part. Comme nous l'avons vu, nous ne pouvons jamais soustraire un corps à toute action extérieure. Si de telles influences sont présentes, dont chacune prise isolément créerait un mouvement, mais si sous ces influences réunies s'institue le repos relatif par rapport au système de référence, nous dirons que *toutes les causes de mouvement relatif se compensent*. Je pourrais me servir aussi de l'expression habituelle : les forces se font équilibre, mais j'éviterai intentionnellement les expressions coutumières, parce que nous leur associons involontairement une foule de représentations, lesquelles, sans que nous le voulions, s'introduisent subrepticement dans nos déductions, et donnent l'apparence que nous ayons démontré quelque chose que nous avons seulement apportée sans raison selon nos vieilles habitudes de pensée et associations d'idées [1]. »

Boltzmann chemine ainsi par la méthode inductive entre deux écueils : l'illusion phénoménologique de pouvoir bâtir la science sans le secours d'abstractions et l'adoption inconsciente d'une foule de représentations qui ne pourraient offrir que l'ombre de véritables démonstrations.

Il s'interdit donc de parler de force jusqu'à pouvoir parler simultanément de la masse. Le *repos relatif* n'est d'ailleurs pas l'équilibre, comme le montre l'exemple d'un corps au repos relatif dans un ascenseur en mouvement accéléré.

« Considérons un cas particulier où les causes de mouvement relatif se compensent. Un corps pesant est suspendu à un fil mince. Nous pourrions penser qu'il n'existe en l'espèce aucune cause de mouvement. Mais nous constatons qu'un mouvement intervient aussitôt si nous éloignons le fil. Il doit donc y avoir au moins deux causes de mouvement en présence, qui se compensaient mutuellement.

» Si nous analysons le mouvement qui intervient après l'éloignement du fil, nous trouvons que lorsque certaines conditions générales sont remplies, ce mouvement s'exécute toujours approximativement de la même façon. Ces conditions générales sont les suivantes : la surface du corps ne doit pas être trop grande par rapport à son poids [2], il ne doit y avoir aucun mouvement important de l'air autour du corps, le fil doit être coupé sans choc ou brûlé... La caractéristique de toutes ces conditions initiales consiste en ceci que tous les points du corps ont, au premier instant du mouvement, des vitesses très petites. Nous pouvons donc supposer approximativement que tous les points du corps n'avaient,

[1] [16], pp. 286-287.
[2] Ici de toute évidence, Boltzmann anticipe sur la notion de poids.

au premier instant du mouvement, aucune vitesse initiale. Quand ces conditions initiales sont satisfaites, l'expérience enseigne que le corps se meut presque exactement selon les mêmes lois, quel que soit l'endroit où il est abandonné au voisinage de la Terre... Si nous nous limitons à une portion pas trop grande de la surface de la Terre, la direction du mouvement est aussi partout la même ; c'est celle du fil qui initialement soutenait le corps. L'expérience nous enseigne alors les lois suivantes de ce mouvement. Tout d'abord, le corps se meut parallèlement à lui-même, c'est-à-dire que tous les points de celui-ci parcourent dans le même temps des chemins égaux et semblablement dirigés ; comme la trajectoire est la même pour chaque point, on peut la désigner comme la trajectoire du corps tout entier ; ensuite, tous ces chemins sont rectilignes ; enfin, la vitesse augmente constamment, tandis que l'accélération est partout constante et la même à tout instant pour tous les corps [1]. »

On peut alors répéter la même expérience, mais en donnant un choc au corps au moment de l'abandonner à lui-même ou en agissant de toute autre manière pour lui communiquer une vitesse initiale. Dans l'ignorance où nous sommes encore du théorème du centre de gravité et des lois de rotation, nous devons nous limiter au cas où le corps se déplace parallèlement à lui-même :

« Le mouvement total peut encore être caractérisé par le fait que l'accélération est verticale et dirigée vers le bas et demeure la même à tout instant et pour tous les corps. Comme nous avons vu que le mouvement se produit toujours exactement de la même façon quand nous le laissons commencer aux différents endroits d'une chambre ou dans son voisinage, *nous devons conclure que la cause du mouvement, que nous appelons force, est la même partout et invariable*. D'autre part, l'accélération est aussi la même partout et invariable, et nous pouvons conclure que, *du moins dans ce cas particulier, l'accélération est la mesure de la force*, et comme la première est partout verticale et dirigée vers le bas, nous disons qu'une force constante, verticale et dirigée vers le bas, la pesanteur, agit sur le corps [2]. »

Dans sa troisième leçon, Boltzmann poursuit la discussion des principes de la mécanique selon la méthode inductive, en s'inspirant étroitement du processus historique :

« Lorsque Galilée eut trouvé les lois du mouvement dans la mesure où nous les avons considérées jusqu'ici, Newton chercha avant tout à les étendre au mouvement des astres, et on peut lui appliquer ce que

[1] [16], pp. 287-288.

[2] *Ibid.*, pp. 288-289. Contrairement à ce qu'il avait annoncé, Boltzmann introduit ici la force indépendamment de la masse. Mais ce n'est là qu'un cas particulier, et nous le verrons revenir plus loin sur la définition de la force.

Schiller disait de Wallenstein : « En vérité, aucune illusion ne l'a trompé, tandis qu'il portait son regard vers les étoiles. » Newton emprunta au cours des astres les lois du mouvement sur lesquelles toutes les formules de la technique et de la théorie des machines, et à vrai dire toute la science moderne est fondée. A la vérité, le passage au monde des étoiles entraîne de nombreux inconvénients. En premier lieu, pour obtenir des lois simples, il nous faut abandonner notre vieux système de référence défini par le corps terrestre, et en choisir un qui ne tourne pas par rapport aux étoiles fixes. En second lieu, la condition de se mouvoir parallèlement à elles-mêmes n'est pas vérifiée par les Planètes. A la place intervient la circonstance que leur éloignement de l'observateur est si grand que leurs parties individuelles ne peuvent en général être différenciées que difficilement, en sorte que, dans une première approximation, nous ne pouvons distinguer les trajectoires des différents points de la même planète. Nous pouvons donc admettre que les lois seraient les mêmes si les corps célestes se mouvaient parallèlement à eux-mêmes. Nous parvenons ainsi, d'une part, très près de la notion de *point matériel*, du fait que l'étendue des corps en mouvement est si petite devant la longueur de leur trajectoire que celle-ci est sensiblement la même pour tous les points d'un corps. Mais, d'un autre côté, nous sommes aussi loin que possible de ce concept, puisque nous avons affaire à des corps qui, loin d'être des points matériels, sont souvent plus gros que notre corps terrestre.

» L'observation et la mesure nous enseignent que souvent, dans l'Univers, autour d'un corps céleste se meut un système de corps que nous appelons des satellites. Nous obtenons les lois les plus simples quand nous rapportons le mouvement des satellites à un système de référence dont l'origine est placée au milieu du corps central et dont les axes demeurent parallèles à trois droites liées au ciel des fixes. L'expérience montre que les trois lois de Képler s'appliquent au mouvement des satellites. Comme l'accélération jouait un rôle essentiel dans la chute libre, nous calculerons aussi dans le cas présent l'accélération enregistrée par un satellite dans son mouvement... On trouve, à partir de la première et de la seconde loi de Képler que cette accélération est dirigée, pour chaque satellite et à chaque instant, vers le corps central et est inversement proportionnelle au carré de la distance r à ce corps, donc représentable sous la forme k/r^2. Il résulte en outre de la troisième loi de Képler que la constante k varie suivant les différents corps centraux, mais qu'elle a la même valeur pour tous les satellites d'un même corps central. Comme nous avons déjà, à propos de la gravité (terrestre), reconnu l'accélération comme la mesure de la cause du mouvement ou force, nous dirons ici également que le corps central exerce sur chaque

satellite une force qui a pour direction la droite joignant le centre du satellite à celui du corps central et qui est inversement proportionnelle au carré de leur distance. Cela n'est, provisoirement, rien d'autre qu'une manière d'exprimer le fait de l'existence de cette accélération. Newton a aussitôt énormément généralisé cette proposition en admettant que chaque corps céleste exerce une telle force sur chaque autre corps céleste, et même chaque particule matérielle sur toute autre particule. Quand par suite un corps céleste est si voisin d'autres corps célestes qu'il en reçoit une action notable, nous sommes dans le cas où il reçoit simultanément différentes accélérations de différentes causes dans différentes directions. Comme nous avons représenté l'accélération comme un vecteur, cela n'est pas la seule hypothèse nécessaire, mais de loin la plus simple et la plus naturelle que d'admettre que ces accélérations se composent comme des vecteurs. Il se vérifie en fait que cette hypothèse est toujours en accord avec l'expérience. Les perturbations des Planètes entre elles, de la Lune par le Soleil et par les Planètes se produisent ainsi en accord précis avec l'expérience. On peut alors élargir l'horizon et rapporter tous les corps célestes à un système de référence lié au ciel des fixes et on obtient ainsi le mouvement des corps centraux en accord avec l'expérience. La gravité se révèle comme identique à l'attraction de la Terre sur les corps pesants. Enfin les phénomènes du flux et reflux de la mer, les expériences de Cavendish, Maskelyne, Airy, etc., montrent l'exactitude de l'extension de la loi de Newton aux corps terrestres [1]. »

La *loi d'inertie* apparaît alors comme un cas particulier de la loi de Newton : un corps qui serait suffisamment éloigné de tous les autres corps pour n'en recevoir aucune action aurait à tout instant une accélération nulle.

Tout ce qui précède ne préjuge en rien de la véritable cause de la force newtonienne, ni du fait qu'elle soit une action directe à distance, ou au contraire qu'elle soit transmise par un milieu [2].

[1] [16], pp. 289-291.

[2] Bien que cela soit sans rapport direct avec la méthode inductive, je crois devoir citer ici un texte où Boltzmann expose de façon très claire les difficultés rencontrées par la mécanique quand elle dut redescendre du ciel sur la Terre, au lendemain du grand œuvre de Newton :

« Avec peine, la physique théorique dut redescendre du ciel sur la Terre... On chercha de deux manières à traduire mathématiquement les phénomènes terrestres dans leur complexité : en premier lieu, on vit dans les corps terrestres des agrégats de points matériels, les molécules, auxquelles on transféra avec certaines modifications les lois du mouvement des corps célestes, mais en tenant compte du fait que dans une simple goutte d'eau on devait supposer d'innombrables millions de semblables individus ; en second lieu, on chercha à former de nouveaux concepts mathématiques pour représenter les corps, tels qu'ils se présentent à nos yeux, comme remplis de masse de façon continue. La première conception pénètre plus profondément dans la nature des choses, la seconde est plus dégagée d'hypothèses indémontrables. Ces deux concep-

« Nous pourrions aussi maintenant, déclare Boltzmann, formuler la *notion de masse* : les masses de deux corps centraux se comporteraient comme les constantes k de la loi de gravitation qui leur correspondent, et cette définition pourrait être étendue aux corps terrestres par l'expérience de Cavendish. Mais nous anticiperions ainsi sur la proportionnalité entre la constante k et la masse définie comme *résistance d'inertie*, ce qui manifestement constituerait une faute de logique. Nous devons donc choisir une tout autre voie pour parvenir au concept de masse. Nous avons considéré jusqu'ici l'accélération comme mesure de la force. Il semblerait alors le plus simple de désigner la grandeur de l'accélération qu'un corps subit du fait d'un autre corps comme la mesure de la force exercée par le second sur le premier. On le fait souvent, en désignant la force ainsi entendue par le terme de *force accélératrice*. Mais il est préférable en général d'introduire un autre concept. [Dans le langage courant] nous entendons par force les *efforts musculaires* que nous pouvons exercer. Il n'y a, à vrai dire, aucune raison de supposer — ce serait plutôt l'inverse — que chaque fois qu'un corps inanimé exerce des actions sur un autre, quelque chose doive intervenir qui corresponde à ces efforts musculaires. Cependant il serait désirable, si l'on choisit ainsi les termes, de se raccorder le mieux possible au concept de la *force-effort musculaire*. Nous avons vu que tous les corps subissent, du fait de la gravité (terrestre), la même accélération. Si nous choisissons ainsi, *sans autre facteur* (comme la masse) *la force* (poids) *que la gravité exerce sur différents corps*, celle-ci serait la même pour tous les corps. Or l'expérience quotidienne nous enseigne que l'effort musculaire que nous devons exercer pour soulever différents corps est très différent. Si donc nous voulons accorder nos représentations, nous devrons dire que la gravité exerce également

tions luttent encore entre elles aujourd'hui. La première fut instituée principalement par les géomètres français : Navier, Poisson, Laplace, Cauchy, Fourier et trouva son expression la plus complète chez Weber. Euler fut le premier à combattre en faveur de la seconde. La splendeur des mathématiques françaises aux environs de l'époque de la grande Révolution conféra initialement à la première méthode une suprématie universelle ; mais elle perdit en crédit par le fiasco d'un théorème de Poisson en élasticité. Déjà Wertheim combattit avec succès ce théorème et en même temps toute la théorie de Poisson, et la défaite définitive de cette théorie fut achevée par Kirchhoff. Des Français comme Lamé se tournèrent vers la seconde méthode qui, en Allemagne, fut développée principalement par Neumann et son élève Kirchhoff. Le but de cette méthode n'est pas de formuler d'audacieuses hypothèses sur la nature de la matière ni de deviner le mouvement des corps à partir de celui des molécules, mais de former des équations qui, libres d'hypothèses, traduisent le plus fidèlement possible et quantitativement le monde des phénomènes, sans se soucier de la nature des objets ni des forces. Dans son livre sur la mécanique, Kirchhoff bannit même tous les concepts métaphysiques, telle la force considérée comme cause du mouvement et se borne à chercher les équations qui correspondent le mieux aux mouvements observables. Au début, l'étonnement fut général devant cette nouvelle façon de traiter la mécanique, mais bientôt on dut céder devant la force de conviction d'une telle logique. » ([6], pp. 70-71.)

sur des corps différents des forces très différentes, mais que les corps de plus grand poids opposent à l'action accélératrice de la gravité une plus grande résistance, dite *résistance d'inertie (masse)*, en sorte que par l'effet de ces deux circonstances, tous les corps subissent la même accélération [1]. »

Et ici Boltzmann appelle l'attention sur la même difficulté que Poincaré devait souligner de son côté dans *Science et Hypothèse* [2] :

« Pour définir ainsi la masse comme résistance d'inertie, nous devrions appliquer *la même force à des corps différents*. Nous pourrions alors définir la masse comme le rapport inverse des accélérations qu'ils prennent quand ils sont soumis à des forces égales. Mais là réside la plus grande difficulté : comment, sans faute de logique, définir l'égalité des forces, quand celles-ci agissent sur des corps différents ? On pourrait soumettre deux corps à la traction de deux fils identiques, également tendus, ou de deux ressorts élastiques. Mais on devrait tout d'abord chercher à établir comme vraisemblable, par des arguments compliqués, empruntés à l'expérience, que deux fils disposés de la même manière exercent la même force sur deux corps entièrement différents [3]. »

Le recours au *principe d'égalité de l'action et de la réaction* ne suffit pas à lever toutes les difficultés :

« Nous pourrions encore, avec Mach, postuler simplement le principe d'égalité de l'action et de la réaction. Si alors deux corps seulement sont en interaction, l'égalité des forces agissant sur chacun d'eux devient évidente. S'ils ne se communiquent que des déplacements parallèles, il serait facile de définir simplement le rapport de leurs masses comme le rapport inverse des accélérations qu'on peut observer en eux. Mais avec l'action de fils interposés, etc., nous avons déjà plus de deux corps en interaction et il serait aussi nécessaire de prendre en considération la déformation des corps intermédiaires. Le cas considéré par Mach ne pourrait alors se produire proprement que par action directe à distance, et cela serait bien incertain d'admettre *a priori* une action directe à distance du point de vue strictement empirique [4]. »

Boltzmann discute encore la *conception statique* d'égalité des forces développée par Streintz :

« Streintz a cherché à obtenir de la façon suivante une définition échappant à toute objection. Il imagine un système quelconque de corps.

[1] [16], pp. 292-293.

[2] Comme il est impossible, déclare Poincaré, pour juger de l'égalité de deux forces, de décrocher une force appliquée à un corps pour l'accrocher sur un autre corps, « comme on décroche une locomotive pour l'accrocher à un autre train », force est de faire appel au principe d'égalité de l'action et de la réaction, lequel a le caractère d'une définition et non d'une loi expérimentale.

[3] [16], p. 293.

[4] *Ibid.*

Dans ce système, soient deux corps K_1 et K_2. Ceux-ci sont au repos à l'instant initial, et commencent alors à se mouvoir d'un mouvement accéléré, mais en restant parallèles à eux-mêmes. Le mouvement des deux corps doit pouvoir cesser si on les relie rigidement l'un à l'autre. Streintz utilise cela comme un critérium que la même force agissait auparavant sur chaque corps, puisque ces deux forces se détruisent par simple liaison rigide. Il qualifie de statique cette conception d'égalité des forces. Celle-ci a l'avantage d'inclure le principe d'égalité de l'action et de la réaction, comme on le voit aussitôt quand on considère le cas particulier où le système total se réduit aux deux corps K_1 et K_2 en interaction. Mais elle renferme beaucoup d'arbitraire. Le fait que l'action des autres forces ne soit pas perturbée par la liaison rigide peut encore être rendu hautement probable du point de vue expérimental. Certaines propositions de statique montrent que les forces de liaison s'ajoutent aux autres forces. Les difficultés seraient encore plus grandes si les corps K_1 et K_2 étaient supposés initialement en mouvement... Si l'on s'en tient à la représentation de Streintz, la définition de la masse ne présente plus de difficultés : les masses des corps K_1 et K_2 sont dans le rapport inverse des accélérations qu'ils avaient dans le premier cas, où aucune liaison rigide n'existait, parce qu'alors la même force agissait sur chacun d'eux [1]. »

Aussi bien avec la définition de Mach qu'avec celle de Streintz, il est encore nécessaire d'admettre que le rapport des masses de deux corps est toujours le même quelles que soient les circonstances ayant servi à le déterminer, et que le rapport des masses des corps K_1 et K_3 est égal au produit des rapports des masses des corps K_1, K_2 et K_2, K_3. On doit encore faire choix arbitrairement d'une masse unité.

« Si nous avons, de telle ou telle façon, fixé le concept de masse, la définition de la force au sens ordinaire, ou comme on dit de la *force motrice*, ne présente plus de difficultés. Celle-ci est le produit de la masse par l'accélération et a par suite la dimension un par rapport à la masse. Comme les accélérations s'additionnent comme des vecteurs, cela vaut aussi pour les forces, du moins dans la mesure où nous les avons considérées jusqu'ici. Ce théorème du *parallélogramme des forces* ainsi que les autres théorèmes développés jusqu'ici peuvent être étendus à la statique et à la dynamique des pressions et tractions par fils et par ressorts [2]. »

On déduit encore de la circonstance que la loi newtonienne de la gravitation doit s'exprimer de façon symétrique à l'égard de deux corps

[1] [16], pp. 293-294.
[2] *Ibid.*, p. 295.

en interaction et du fait que la constante d'attraction k est la même pour tous les satellites d'un même corps central, que cette constante doit être égale au produit des masses des deux corps en interaction par une même constante universelle, tandis que le fait que tous les corps reçoivent par la gravité (terrestre) la même accélération nous apprend déjà que le poids doit être proportionnel à la masse.

Nous sommes encore loin de pouvoir déduire des principes précédents l'ensemble des théorèmes de mécanique. Il nous manque encore le concept important de *point d'application d'une force.*

« Pour obtenir ce concept, pour pouvoir traiter de la rotation d'un corps solide, des déformations des corps élastiques et du mouvement des fluides, nous devons faire appel à de nouveaux faits. Quand un fil est fixé à un corps, ou qu'un ressort agit en un endroit de celui-ci, il n'y a qu'une toute petite partie du corps qui soit immédiatement affectée par la force. Si nous découpons cette partie et si nous plaçons un intervalle intermédiaire très petit entre cette partie et le reste du corps, celui-ci ne sera affecté à son tour que lorsque l'espace intermédiaire aura été rempli du fait du mouvement de la petite partie séparée. Nous appelons cette partie l'endroit d'application de la force et nous pouvons encore, par idéalisation, en faire un simple point [1]. »

On doit encore introduire, comme idéalisations de faits d'expérience, les théorèmes concernant l'équilibre des forces arbitraires appliquées à un corps solide, et les théorèmes relatifs aux moments statiques, et suivre ainsi une voie analogue à celle de Streintz, en partant de la statique pour aboutir à la dynamique. On doit enfin introduire l'hypothèse que si des forces s'appliquent à un corps entier ou à une partie étendue de celui-ci, tout se passe comme si en chaque point s'exerçait la tension d'un fil ou la pression d'un ressort. Ainsi, par exemple, on doit admettre que la pesanteur s'applique simultanément en tous les points d'un solide.

Une fois obtenues ces propositions d'une manière ou d'une autre, on doit passer à la *division d'un corps en éléments de volume.* La divisibilité de la plupart des corps doit être tenue pour un fait d'expérience. Si l'on imagine que la division se poursuit à l'infini, on parvient au résultat suivant : le corps se compose d'une infinité de volumes élémentaires dv et la masse contenue dans chaque élément de volume est $dm = \varrho\, dv$.

« Pour ce qui concerne les forces que les éléments de volume de corps solides exercent les uns sur les autres, on doit admettre que chaque élément de volume n'agit que sur les éléments immédiatement voisins et qu'il exerce des forces en tous les points de la surface de séparation, forces qui agissent exactement comme si en ces points étaient fixés des

[1] [16], pp. 295-296.

fils en tension ou des verges. Lorsque la surface de séparation est plane et suffisamment petite, on doit admettre en outre que ces forces agissent uniformément sur tous les points de la surface. Ces propositions peuvent à peine être établies par l'expérience et trouvent leur justification seulement dans l'accord de leurs conséquences avec l'expérience. Si l'on applique le théorème statique des moments à un élément de volume, on trouve que dans le cas de l'équilibre la force qui agit dans la direction de l'axe des y sur un élément perpendiculaire à l'axe des x est égale à celle qui agit dans la direction de l'axe des x sur un élément perpendiculaire à l'axe des y. Nous appelons ce résultat le théorème X [1]. Aux hypothèses introduites jusqu'ici, que nous pensions suffisamment justifiées par l'expérience, il faut encore ajouter les suivantes : premièrement, la force élastique dépend exclusivement du changement de structure du corps correspondant, mais non de ses états antérieurs ni de la vitesse de ses parties. Deuxièmement, chaque élément se meut conformément aux lois que nous avons établies jusqu'ici uniquement pour les mouvements de translation. Sous ces hypothèses, on obtient aussitôt les équations de la *théorie ordinaire de l'élasticité* [2]. »

Ces équations ne valent que pour un solide idéal, car tous les corps réels présentent du frottement interne et de l'hystérésis que nous avons exclus jusqu'ici. Le théorème de Cauchy (théorème X) n'est lui-même nullement évident *a priori* :

« Lord Kelvin a imaginé l'éther lumineux comme doté de toutes les propriétés que nous avons attribuées aux corps solides, à l'exception près qu'il abandonne la validité du théorème X. Nous ne discuterons pas ici la question de savoir si le comportement de l'éther lumineux peut être expliqué par l'hypothèse de Lord Kelvin. Il nous suffit de dire que celui-ci a pu développer sans aucune contradiction interne des équations du mouvement pour les éléments de volume d'un corps pour lequel le théorème X n'est pas valable. Nous nous bornerons provisoirement aux corps qui satisfont aux équations idéales de l'élasticité [3]. »

Si de tels corps sont si peu déformables qu'on peut les considérer comme rigides, et si les mêmes conditions sont satisfaites pour un système arbitraire de ces corps, on peut démontrer facilement que le principe des travaux virtuels, joint à celui de d'Alembert est ici applicable. Et si on considère toutes les forces, y compris les forces élastiques, la somme suivante s'évanouit :

$$\sum [(mx'' - X)\,\delta x + (my'' - Y)\,\delta y + (mz'' - Z)\,\delta z],$$

[1] C'est en fait le théorème de Cauchy.
[2] [16], pp. 297-298.
[3] *Ibid.*, p. 298.

parce que chaque terme de cette somme s'évanouit. Comme l'action est toujours égale à la réaction, les termes de cette somme qui correspondent à l'interaction des éléments de volume s'évanouissent séparément lorsqu'ils appartiennent à des corps rigides, qui ne sont susceptibles d'aucuns changements relatifs de situation. Le principe peut être appliqué à des liaisons qui ne sont que partiellement rigides : surfaces inextensibles, fils, etc., car ceux-ci peuvent toujours être considérés comme le cas limite de corps élastiques très minces.

Du principe de d'Alembert, joint à celui des travaux virtuels, on déduit les *théorèmes généraux* de la mécanique (mouvement du centre de gravité, moments cinétiques).

« *Ces théorèmes apparaissent ici dans notre exposé pour la première fois.* Il ne peut en être autrement, car l'essence de la méthode inductive consiste en ceci que nous ne postulons pas le concept de point matériel en tant que celui d'un corps sans étendue mais doué de masse[1]. » Nous ne parvenons aux conclusions que l'on tire habituellement de ce concept que par la représentation des éléments de volume, qui nous paraît plus proche de l'expérience que celle du point matériel. Nous avons déjà dû, à vrai dire, faire appel deux fois au concept de *point mathématique*, en considérant le mouvement d'un point prélevé sur un corps et en imaginant le point d'application d'une force, mais l'abstraction correspondante était plus simple et plus claire que celle d'un corps sans étendue et doué de masse[2].

Les forces qui agissent sur les fluides peuvent être considérées comme un cas particulier de celles qui agissent sur les corps élastiques, et obtenues par suite de la même manière. Les changements de structure des fluides peuvent alors être décrits par le mouvement des éléments de volume, qui suit les lois déjà obtenues ; seulement la déformation du fluide dans son ensemble peut être arbitrairement grande.

On peut ainsi atteindre le domaine des *phénomènes proprement mécaniques*. Dans les phénomènes dissipatifs (hystérésis, frottement interne, etc.) la chaleur produite joue déjà un rôle. On peut naturellement conserver la forme des équations antérieures, en ajoutant aux forces jusqu'ici introduites des termes complémentaires tels que la somme totale soit égale au produit de la masse par l'accélération ; mais une telle présentation n'a qu'une valeur formelle quand les termes complémentaires dépendent de façon très compliquée des vitesses, des états antérieurs, etc. « La théorie moléculaire offre décidément ici plus de clarté, car elle peut rendre en quelque façon ces termes sensibles, à l'aide d'une rotation lente des molécules en de nouvelles positions de repos, de la transformation

[1] [16], p. 299.
[2] *Ibid.*

de mouvement visible en mouvement moléculaire, etc. Le principe des travaux virtuels conserve naturellement sa signification, si on l'applique à l'équilibre d'un système de corps, car les processus dissipatifs disparaissent dans le repos. Mais le principe de d'Alembert retombe au rang d'une formule vide, dès l'instant où dans les expressions des forces se trouvent des termes qui dépendent du mouvement, des états antérieurs des corps, etc. [1]. »

Boltzmann ajoute encore, à propos de l'énergétique :

« Comme le concept d'énergie joue un rôle si important, non seulement en mécanique, mais dans toute la science, on souhaiterait hautement des exposés cohérents des principes de la mécanique du point de vue de l'énergétique, lesquels devraient partir par conséquent non des concepts d'accélération et de force, mais de ceux d'énergie cinétique et de potentiel. Mais les images correspondantes devraient être développées de façon claire et exempte de contradiction, soit selon la méthode déductive, soit selon la méthode inductive, et des règles tout à fait précises devraient être données pour appliquer ces images de façon univoque à tous les cas particuliers, sans supposer la connaissance de l'ancienne mécanique [2]. »

En conclusion, Boltzmann ne prétend pas avoir voulu donner en l'espèce un exposé complet de la mécanique du point de vue de la méthode inductive : il y faudrait un assez gros livre où l'on pourrait suivre à la fois les principes de base et leur application à toutes sortes de cas particuliers. Il déclare s'être borné à montrer la voie par laquelle un semblable exposé pourrait être obtenu, en mettant nommément en évidence les difficultés propres à cette méthode, lorsqu'on cherche à obtenir et à développer une construction aussi cohérente que celle que permet la méthode déductive. Il se prononce, en dernière analyse, en faveur de celle-ci, mais invite les tenants de la méthode inductive à mettre en évidence toutes les erreurs qui ont pu se glisser dans son propre exposé, à montrer la possibilité d'établir de façon précise ce qu'il s'est borné à esquisser et à employer le meilleur de leurs forces à combattre la méthode déductive, afin qu'un progrès conjugué des deux méthodes puisse naître de ce conflit.

Dans la sincérité de son éclectisme, Boltzmann se déclare satisfait en toute hypothèse : il applaudirait volontiers au succès d'un exposé complet par la méthode inductive ; mais, en cas d'échec, il serait confirmé dans la préférence qu'il avait cru devoir donner à la méthode déductive dans son propre traité de mécanique.

[1] [16], pp. 300-301.
[2] *Ibid.*, pp. 302-303.

CHAPITRE III

Exposé des principes de la mécanique

Bring' vor, was wahr ist
Schreib' so, dass es klar ist
Und verficht's, bis es mit dir gar ist[1] !

Nous connaissons déjà, par la discussion précédente, le principe de la méthode choisie par Boltzmann pour exposer les principes de la mécanique deux ans avant ses conférences à la Clark University, dans ses *Vorlesungen über die Principe der Mechanik*, [3].

Le premier volume de ces leçons s'insère, dans les Traités de Boltzmann, avant la seconde partie de la *Gastheorie*. Il avait été rédigé par Boltzmann dans l'intention de donner à son auditoire de l'Université de Vienne une connaissance préalable des théories de la mécanique avant d'aborder cette seconde partie de la théorie cinétique, mais en fait n'a pas été professé sous cette forme.

Sauf à consentir à quelques redites sur la discussion précédente, il n'est pas sans intérêt de s'arrêter quelques instants à cet ouvrage, qui offre quelques précisions nouvelles sur la pensée de Boltzmann.

Dès l'introduction, Boltzmann se défend de vouloir donner à la mécanique — comme l'entendait la critique de l'époque — un vêtement tout nouveau. Au contraire, il se propose de résoudre les difficultés propres aux principes de la mécanique dans un exposé aussi fidèle que possible à la forme classique. Il n'hésite pas à adopter un modèle précis, arbitraire certes et susceptible de succomber devant des expériences nouvelles, mais pouvant être suivi en toutes ses conséquences d'une manière parfaitement définie.

Ce modèle est, dans l'esprit de la méthode déductive, une construction abstraite qui ne sera soumise qu'après coup au contrôle de l'expérience :

« Le défaut de clarté dans les principes de la mécanique me semble provenir du fait que l'on n'a pas voulu commencer par des images mentales de caractère hypothétique, mais s'accrocher dès le début à l'expé-

[1] Sentence placée par Boltzmann en exergue de ses Leçons sur les principes de la mécanique, et que l'on peut traduire approximativement ainsi : « Apporte la vérité, exprime-la clairement, et défends-la jusqu'à ton dernier souffle. »

rience. On cherchait plutôt à dissimuler le passage aux hypothèses, sinon à feindre une démonstration de la nécessité de l'édifice en dehors de toute hypothèse : de là l'obscurité [1]. »

Boltzmann est aussi convaincu que Poincaré de la nécessité de l'hypothèse. Mais pour lui — nous le savons déjà — toute hypothèse est image, modèle, *Bild* au sens à la fois abstrait et précis du terme dont nous n'avons guère l'équivalent français [2]. A l'opposé, une stricte phénoménologie ne saurait être qu'un simple catalogue des faits d'expérience :

« Si recommandable qu'il puisse être de séparer les faits d'expérience des hypothèses, et de ne jamais accumuler celles-ci sans raison, je pense cependant que l'on ne pourrait, à défaut d'élément hypothétique, dépasser le stade de marquer dans notre pensée, sans simplification, chaque phénomène individuel. Toute simplification des constructions de l'esprit, toute règle ayant pour objet de résumer les phénomènes et de les prévoir selon des prescriptions simples, repose sur le recours à des images extraites des phénomènes [3]. »

Le caractère formel de l'édifice abstrait des principes doit nous garder de toute illusion :

« Peut-être le lecteur ne pourrait-il pas au début se défendre du sentiment que nous nous livrons à un simple jeu d'images mentales, et que nous perdons de vue la réalité. Sans souci de cela, nous aspirons d'abord à construire un édifice aussi clair et aussi exempt de contradiction que possible. S'il se révèle ensuite en accord avec l'expérience, l'arbitraire des bases de notre représentation en sera excusé. Nous ne prétendions pas avoir là une image de la nature et le fait que nous en ayons claire conscience nous évite le danger de nous fier à notre modèle plutôt qu'à l'expérience et d'être aveugle à l'égard de celle-ci [4]. »

Le challenge à l'énergétique est ici beaucoup plus délibéré que dans la discussion précédente :

« Je serais le dernier à nier la possibilité d'obtenir de la nature une image meilleure par une voie autre que l'atomistique. Précisément pour donner une mesure de la valeur d'une image différente de la nature, je m'efforcerai de développer dans ce livre, d'une façon aussi claire et cohérente que possible, les modèles traditionnels de la mécanique. Que l'on essaye donc, serait-ce sur une base énergétique ou purement phénoménologique, de présenter un autre *Weltbild* dépourvu d'hypothèses, non seulement en en montrant par quelques vagues indications la possibilité,

[1] [3], p. 2.
[2] Ce n'est pas le sens matériel qu'y attache Duhem lorsqu'il condamne, dans sa *Théorie physique*, [3], l'abus des modèles.
[3] [3], pp. 2-3.
[4] *Ibid.*, p. 6.

mais du commencement jusqu'à la fin, avec la même clarté que le modèle mécanique exposé dans ce qui suit : *Hic Rhodus, hic salta*[1] ! »

Cela dit, énumérons ici les sept postulats placés par Boltzmann au seuil de la mécanique (vol. I, pp. 9-25) :

Postulat 1 : Continuité du mouvement. Il n'y a jamais, au même point de l'espace, ni dans un voisinage infiniment petit, deux points matériels différents. Chaque point matériel possède une trajectoire continue.

Postulat 2 : Les fonctions continues exprimant les coordonnées d'un point matériel possèdent des dérivées des deux premiers ordres.

Postulat 3 : Dans un ensemble de n points, l'accélération (vectorielle) d'un point matériel arbitraire est égale à la somme des $n-1$ accélérations (vectorielles) portées par les droites joignant ce point à l'un quelconque des autres points.

Postulat 4 : L'accélération d'un point matériel P_1 due à l'action d'un autre point matériel P_2 est directement opposée à l'accélération du point P_2 due à l'action du point P_1.

Postulat 5 : La grandeur g_{12} de l'accélération d'un point matériel quelconque P_1 due à l'action d'un autre point matériel P_2 ne dépend ni de leurs positions absolues dans l'espace, ni de la valeur absolue du temps, ni de la vitesse de ces points, ni de la direction de la ligne qui les joint, mais seulement de la distance r_{12} qui les sépare : $g_{12} = \pm F(r_{12})$, avec le signe $+$ en cas de répulsion et le signe $-$ en cas d'attraction.

Postulat 6 : La grandeur g_{21} n'est pas nécessairement égale à la grandeur g_{12}, mais ces deux grandeurs doivent être, à chaque instant et à toute distance, dans un rapport constant μ_2.

Postulat 7 : Si r_{13} est la distance du point P_1 à un troisième point quelconque P_3,

$\Phi(r_{13})$ l'accélération de P_1 due à P_3,

$\mu_3 \Phi(r_{13})$ l'accélération de P_3 due à P_1,

$\psi(r_{23})$ l'accélération de P_2 due à P_3,

l'accélération de P_3 due à P_2 sera :

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} \psi(r_{23}).$$

[1] [3], pp. 4-5.

Posant alors :

$$\frac{m_1}{\mu_2} = m_2 \qquad \text{et} \qquad \frac{m_1}{\mu_3} = m_3$$

on obtient les relations

$$m_1 g_{12} = m_2 g_{21}$$

$$m_1 g_{13} = m_3 g_{31}$$

$$m_2 g_{23} = m_3 g_{32}$$

et ainsi de suite pour n points.

A chaque point matériel est ainsi attaché un nombre déterminé m (sa *masse*) et à chaque couple de points une fonction $f(r)$ de leur distance, que l'on appelle *force* agissant entre les deux points à cette distance. La valeur absolue de $f(r)$ est dite *intensité* de la force ; la direction de l'accélération que le second point imprime au premier est dite *direction* de la force exercée par le second sur le premier.

Des masses m de tous les points matériels, il y en a une et une seule entièrement arbitraire.

Boltzmann reconnaît devoir à Mach le principe de cette définition de la masse.

Les équations générales du mouvement s'écrivent alors :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \sum_{k=2}^{k=n} f_{1k}(r_{1k}) \frac{x_1 - x_k}{r_{1k}}$$

(et deux équations analogues pour les autres coordonnées)

Elles sont ainsi au nombre de $3n$ pour n points matériels.

Revenons un instant au premier postulat, qui tend à préciser que chaque fois qu'un point matériel, à un instant donné, occupe une position donnée, et que l'on trouve, au bout du temps dt, un point matériel dans le voisinage immédiat de cette position, il ne peut s'agir que du même point matériel. Schrödinger observe à ce sujet que personne n'avait considéré, avant Boltzmann, qu'il fût nécessaire de définir clairement ce qu'on doit entendre par *le même point matériel*. Il fait grief aux physiciens modernes de n'avoir pas réalisé l'importance de ce postulat, ni la gravité qu'il peut y avoir à s'en écarter [1].

Pour prévenir les objections des tenants de la phénoménologie, Boltzmann a cru devoir donner, assez paradoxalement semble-t-il, quelques gages aux idées qu'avait professées Kirchhoff :

[1] *Lettre à E. Broda*, cf. Broda, [1], pp. 65-66.

« Notre modèle satisfait à l'exigence, formulée par Kirchhoff, que la physique doit se borner à une simple description des faits, en tant qu'elle constitue uniquement un ensemble de règles pour la construction de représentations arithmétiques ou géométriques à l'aide desquelles les faits d'expérience pourraient, à chaque instant, être prédits avec exactitude. Les concepts de cause et d'effet sont ainsi entièrement laissés de côté. En effet, si on désigne ici et là la présence d'un point matériel comme la cause de l'accélération d'un autre point, on veut ainsi exprimer seulement le fait que ces deux points, à une distance donnée, reçoivent des accélérations déterminées. J'espère donc que, du point de vue de la théorie de la connaissance, on ne pourra soulever d'objections au mode d'exposition que nous avons choisi ici [1]. »

En offrant un modèle ne prêtant à aucune ambiguïté, Boltzmann pense avoir satisfait d'autre part à l'impératif, formulé par Hertz, d'un accord avec les lois de la pensée. « Car, observe-t-il, je ne conçois d'autre loi que celle qui impose à nos images d'être exprimées de façon claire et univoque et de fournir aussi facilement et nettement que possible un résultat conforme à l'expérience. »

Boltzmann reprend ici l'analyse de la difficulté de définir, en se fondant sur l'expérience, l'égalité des forces entre points matériels :

« Comment soumettre à une même force différents points matériels ? Si l'on emprunte la définition du rapport de la masse de deux corps au phénomène du choc, on ne peut également éviter de considérer les éléments de volume qui se choquent ; si on l'emprunte à l'action directe à distance de deux corpuscules, on retombe par une déduction logique sur notre définition. Il n'y aurait certes aucune objection à commencer par une image parfaitement claire des actions mutuelles des éléments de volume des corps élastiques et à en déduire les concepts fondamentaux et les lois de la mécanique habituelle. Cela ne se fait cependant pas ; on définit bien davantage les propriétés (masses) et les lois de transformation (forces) des points matériels simples par des processus dans lesquels la considération de tels éléments de volume est indispensable, comme le choc ou la fixation du même ressort élastique à différents corps. Dans les représentations que l'on forme des points matériels, des expériences sur des objets étendus sont mélangées à des constructions conceptuelles sur des points individuels. Qui ne ressent le cercle vicieux qui consiste, lorsqu'on définit dans l'introduction des concepts de base le point matériel comme un très petit corps, à soutenir ensuite le fait — qui sera donné comme une conséquence éloignée de la théorie fondée là-dessus — que l'on ne néglige que des quantités d'ordre supérieur en

[1] [3], pp. 37-38.

traitant les volumes élémentaires, qui proprement sont de petits corps, comme de simples points de l'espace [1] ? »

Boltzmann répète ici son admiration pour la mécanique de Hertz, qui constitue une image parfaitement intelligible, claire et univoque. Mais il ajoute : « Je ne regrette qu'une chose, savoir la démonstration que la nature se laisse réellement représenter par cette image [2]. »

Boltzmann ne prétend nullement que son modèle soit le dernier mot de la nature, mais il doute de la possibilité d'en trouver de plus simples et de plus efficaces :

« Je ne nie naturellement pas la possibilité d'exposer clairement les concepts [de la mécanique] d'une autre façon que celle suivie ici : seulement il ne me semble pas qu'on y ait réussi. Je ne veux en aucune manière avoir dit qu'il me paraisse vraisemblable que l'apparente action à distance fonction de la distance mutuelle des points matériels soit l'image définitive des voies de la nature. On a souvent déjà tenté d'expliquer celles-ci par les chocs des molécules d'un milieu (l'éther lumineux). Mais on doit alors faire des hypothèses accessoires assez compliquées, par exemple supposer une structure réticulaire pour expliquer la cohésion des molécules pondérables. On a encore besoin des lois du choc et par suite à nouveau du concept de masse. On a cherché, d'un autre côté, à représenter les molécules comme des anneaux de tourbillon et à expliquer ainsi leur apparente action à distance. La possibilité existe certainement de supplanter les forces à distance par de semblables tentatives d'explication. Cependant, les hypothèses avancées jusqu'ici ne me semblent ni plus simples, ni plus claires que l'image dont je suis parti ici. Ces modèles me semblent bien plus accroître le nombre des hypothèses arbitraires et cela sans bénéfice... Somme toute je voudrais, au lieu de la question : Comment en fait sont disposés les objets ? poser la question plus modeste, mais plus claire : Par quelles images les apparences que nous constatons peuvent-elles être représentées actuellement d'une façon simple et non équivoque [3] ? »

En conclusion de toute cette discussion, Boltzmann demande qu'on accorde à ce qu'il appelle l'atomistique fondée sur des images mécaniques traditionnelles la valeur, au moins intérimaire, d'un exemple à méditer et d'une base de départ :

« Que le futur achèvement de la mécanique doive être attendu des images particulières utilisées aujourd'hui ou du remplacement de celles-ci par des représentations plus générales de caractère énergétique ou phénoménologique, je pense en tout cas que le fait de préciser d'abord la

[1] [3], p. 39.
[2] *Ibid.*, p. 41.
[3] *Ibid.*

mécanique atomistique actuelle peut être utile, en premier lieu parce que celle-ci offre les bases d'un développement ultérieur, en second lieu parce qu'elle peut servir d'exemple, pour toute théorie nouvelle, d'une indispensable clarté et logique interne. Cette mécanique ne me paraît d'aucune manière en accord avec des lois particulières de la pensée, mais fondée bien plus sur ce qu'elle utilise exclusivement des règles et des constructions qui, conformément à l'expérience, comportent toujours une application univoque et aussi, lorsqu'on ne connaît pas d'avance le résultat, le donnent de façon clairement déterminée, en accord avec les faits observés [1]. »

Sur le mécanisme et le rôle de la mécanique en physique théorique

Boltzmann ne s'est pas borné aux exposés que nous venons d'analyser. De fait, tout au long de sa carrière et en marge de son œuvre sur la théorie cinétique, il n'a cessé de réfléchir aux principes de la mécanique.

« J'ai acquis, déclarait-il à Vienne en octobre 1902, une certaine routine dans la tenue des leçons inaugurales portant sur les principes de la mécanique. Déjà la leçon par laquelle je débutais dans les fonctions de professeur ordinaire à Graz il y a trente-trois ans portait sur ce thème. J'ouvre aujourd'hui à Vienne mes leçons pour la troisième fois en traitant ce sujet, auquel j'ai encore consacré une leçon à Munich et l'autre à Leipzig [1]. »

A vrai dire, les leçons inaugurales dont le texte se trouve repris dans les *Populäre Schriften* n'ont pas toujours la densité des exposés que nous venons d'analyser et viennent partiellement doubler ceux-ci. Aussi n'y ferons-nous ici que quelques emprunts.

Pascal se bornait à dire : « Il ne faut pas se méconnaître : nous sommes automate autant qu'esprit. » Emporté dans le feu de ses leçons inaugurales, notamment à Leipzig en novembre 1900, Boltzmann est allé occasionnellement beaucoup plus loin, en se faisant l'avocat d'un mécanisme universel :

« L'observation la plus superficielle montre que les lois mécaniques ne sont pas limitées à la nature inanimée. L'œil est jusqu'au moindre détail une chambre noire optique, le cœur une pompe, la musculature un système de leviers qui n'est compréhensible que du point de vue de la mécanique pure et qui résout par les moyens les plus simples les problèmes en apparence les plus compliqués [2]. »

Boltzmann fait appel à son propre exemple pour montrer à quel point notre pensée même peut être mécanique : « Il m'est arrivé, pour me rap-

[1] [17], p. 330.
[2] *Ibid.*, pp. 312-313.

peler un mot grec, de réciter de mémoire toute une série de vers d'Homère, où ce terme se trouvait aussitôt à sa place normale. M'étant exclusivement occupé à longueur de semaine de la mécanique de Hertz et voulant commencer une lettre à ma femme par les mots « *Liebes Herz* » (cher cœur), j'avais, avant de m'en apercevoir, orthographié *Hertz (sic)* [1]. »

Boltzmann assimile le darwinisme, auquel il est entièrement acquis, à une théorie mécanique. Le mécanisme s'étendrait aussi à l'harmonie des formes dans le règne végétal ou animal, aux sentiments, comme celui du plaisir et de la douleur, à la psychologie, à l'art... Je passe sur les détails, assez largement gratuits, de sa thèse pour en venir à sa conclusion. Il s'y montre d'ailleurs beaucoup plus prudent, en soutenant habilement le caractère *purement nominal* du mécanisme universel tel qu'il le conçoit :

« [Nous sommes ainsi conduits à intégrer] au domaine de la mécanique non seulement nos organes corporels, mais encore notre vie spirituelle, l'art et la science, nos perceptions et nos sentiments. Mais la mécanique n'est-elle pas, pour traduire toutes ces choses, trop mécanique ? Combien le mécanisme le plus compliqué réalisé par la main de l'homme apparaît dérisoire et sans vie devant la plus simple manifestation du domaine végétal ou animal.

» Je conçois l'horreur que peut inspirer ma thèse à un idéaliste, qui craindrait de voir toute grandeur et toute élévation avilie, et toute poésie évanouie au profit d'un mécanisme vide de tout sentiment. Mais cette crainte me paraît reposer sur une incompréhension totale de ce que j'ai avancé.

» Les idées que nous nous formons des objets ne sont jamais identiques à leur nature. Ce sont de simples images, ou mieux encore de simples signes, qui ne représentent que partiellement la chose signifiée, et qui ne peuvent rien faire de plus que traduire certaines analogies, tandis que la nature des choses demeure entièrement inchangée [2]. Nous n'avons donc rien à retirer du caractère tranchant et assuré des affirmations précédentes. Nous n'avons fait que prétendre à une certaine analogie entre les phénomènes psychiques et les mécanismes simples de la nature. Nous nous sommes borné à construire une image partielle à l'effet de rendre sensibles certaines connexions entre les phénomènes connus et la prédiction d'autres, nouveaux et encore inconnus. En dehors de cette image, et en raison du caractère partiel de celle-ci, il peut

[1] [17], p. 313.

[2] Le nominalisme de Boltzmann rencontre ici le positivisme scientifique de Pascal : « La nature a mis toutes ses vérités chacune en soi-même ; notre art les renferme les unes dans les autres, mais cela n'est pas naturel ; chacune tient sa place. » (*Pensées*, 427.)

et doit en intervenir d'autres qui décriront l'aspect interne, éthique du sujet et l'élévation de notre âme n'en subira aucun préjudice, dès l'instant où nous avons une conception correcte d'une image mécanique...

» Par là tombe l'objection, qui vraisemblablement me sera faite, de contredire à la religion. Rien n'est plus éloigné de ma pensée que de rapprocher des concepts religieux, qui reposent sur une base tout autrement solide, les images chancelantes et subjectives que nous nous formons des objets extérieurs. Je serais le dernier à proposer les idées que j'ai émises si elles devaient recéler le moindre danger pour la religion. Mais je suis convaincu que le temps viendra où chacun comprendra que mes considérations sont aussi étrangères à la religion que la question de savoir si la Terre tourne ou non autour du Soleil [1]. »

Revenons à un plan plus concret. Après avoir montré comment la mécanique avait conquis successivement les différents domaines de la physique :

« La mécanique partit en campagne dans le domaine de la théorie de la chaleur par cette représentation que la chaleur est un mouvement des plus petites particules des corps, lequel en raison de l'impossibilité d'observer celles-ci demeure invisible, mais se laisse reconnaître à cela que ce mouvement, lorsqu'il est communiqué aux molécules de notre corps, donne la sensation de la chaleur, et lorsqu'il est enlevé au contraire à notre corps, la sensation du froid. Cette campagne fut victorieuse, car l'hypothèse décrite donne une image beaucoup plus claire du comportement de cet agent, que la théorie antérieure qui assimilait celui-ci à une substance.

» L'électricité et le magnétisme furent soumis aux lois mécaniques à travers l'hypothèse des fluides électrique et magnétique, dont les particules devaient agir les unes sur les autres selon une loi qui n'était qu'une modification de la loi de Newton sur l'interaction des corps célestes, donc enracinée sur le sol de la mécanique pure [2]. »

Boltzmann note fort justement que, sinon le mécanisme, du moins la mécanique — au sens traditionnel — était appelée à perdre du terrain dans le domaine même qu'elle avait conquis, celui de la physique théorique :

« La raison en était, comme cela est souvent le cas pour les nations conquérantes, à la fois dans une fissure interne et dans des circonstances extérieures... [On chercha] à établir *a priori* que toute transformation qualitative visible devait se laisser ramener à un mouvement de particules élémentaires, pour la raison que le mouvement est le seul processus dans lequel l'objet mû demeure toujours le même. Je tiens pour insuffi-

[1] [17], pp. 323-325.
[2] *Ibid.*, p. 312.

santes toutes les raisons métaphysiques de ce genre. A vrai dire nous devons en tout cas former le concept de mouvement. Si toutes les transformations qualitatives visibles se laissaient représenter par l'image des mouvements ou des modifications d'arrangement de petites particules, cela conduirait à une explication particulièrement simple de la nature. Celle-ci nous apparaîtrait alors comme extrêmement facile à concevoir. Mais nous ne pouvons l'y obliger. On doit laisser ouverte la possibilité que cela ne se vérifie pas, et que pour représenter la nature nous ayons besoin encore d'autres images traduisant d'autres transformations et il est compréhensible que le récent développement de la physique ait précisément amené à considérer cette possibilité.

» La physique mécaniste avait imaginé tous les corps comme des agrégats de points matériels agissant directement à distance les uns sur les autres. Aux distances très petites (moléculaires) devaient agir les forces de cohésion, d'adhérence et les liaisons chimiques, aux grandes distances la gravitation. On admettait encore, à côté de la matière pondérable, l'existence de l'éther lumineux, que l'on imaginait tout à fait analogue à un corps solide, tandis que l'on expliquait les phénomènes électromagnétiques, comme nous l'avons déjà dit, par les fluides électrique et magnétique dont les particules devaient pareillement exercer les unes sur les autres des actions à distance. Cette dernière hypothèse devait longtemps satisfaire à tous les phénomènes observés. C'est seulement il y a un peu plus de dix ans que Hertz parvint à établir par des expériences que, comme Faraday et Maxwell l'avaient déjà présumé, les forces électrique et magnétique n'agissent pas immédiatement à distance mais sont conditionnées par des changements d'état qui se propagent d'élément à élément avec la vitesse de la lumière. La célèbre théorie des fluides électriques en reçut un choc dont elle devait bientôt mourir. Mais une autre théorie devait être atteinte par les expériences de Hertz. Les lois de propagation des ondes électromagnétiques révélaient une concordance si absolue avec celles de la lumière qu'on ne pouvait guère douter de l'identité des deux phénomènes. On n'écartait pas encore définitivement l'idée que la lumière repose sur le mouvement oscillatoire des particules d'un éther, mais on établissait que l'éther lumineux devait avoir certainement des propriétés beaucoup plus compliquées que celles qu'on lui avait attribuées jusque-là. La théorie de l'électricité et du magnétisme y gagna un poids tel que, de quelques côtés, on essaya de substituer en physique théorique l'hégémonie de l'électromagnétisme à celle de la mécanique, en s'efforçant au contraire de déduire de la théorie électromagnétique les lois les plus simples de la mécanique [1]. »

[1] [17], pp. 325-327.

Ayant ainsi noté l'existence du courant qui devait aboutir, quelques années plus tard, à la relativité restreinte, c'est-à-dire à la prédominance du groupe de Lorentz sur le groupe de Galilée, Boltzmann poursuit son analyse de l'évolution des idées directrices en physique théorique :

« D'un autre côté, on était devenu méfiant à l'égard de toute hypothèse, et on entendait réduire la tâche de la théorie à donner des phénomènes une description n'allant pas au-delà des données de l'expérience. Le choix s'offre ainsi entre deux méthodes extrêmes. Si l'on fait des hypothèses trop particulières, on court le risque d'introduire du superflu et même de l'inexact dans le champ des représentations. Si l'on cherche au contraire à rejeter toute hypothèse, la théorie devient indéterminée et impropre à prévoir de nouveaux phénomènes et à orienter ainsi l'expérience sur de nouvelles voies. On conçoit qu'après le règne d'hypothèses trop habiles une réaction se soit produite.

» Il arriva là-dessus qu'un concept, celui de l'énergie, dont l'importance avait été déjà clairement reconnue par Leibniz et qui jouait depuis longtemps en mécanique un rôle significatif, fut graduellement promu à englober le monde entier des phénomènes. Quoique plus abstrait que celui de matière, ce concept peut cependant être suivi avec précision dans chaque phénomène et être défini quantitativement, là où nous manque tout point de départ sur une matière à laquelle il serait lié.

» L'énergie révèle encore, dans chacune des formes où elle apparaît, des particularités caractéristiques et en outre de remarquables analogies, en sorte que la doctrine des mutations et des propriétés de l'énergie prit bientôt tant d'influence qu'elle aspira, de son côté, à l'hégémonie en physique théorique et chercha à faire de celle-ci une énergétique...

» En ce qui concerne la base de logique formelle, l'ancienne mécanique s'était attachée au dualisme de la force et de la matière. La matière est l'objet du mouvement. On est par suite habitué à chercher la cause de chaque mouvement particulier. En étendant cette habitude de pensée au-delà des limites de sa validité, donc en dépassant le but dans ses applications, on pensait devoir admettre, dans toute intervention des phénomènes de mouvement, une cause particulière séparée de la matière, à laquelle on donnait le nom de force, et à laquelle on conférait, à côté de la matière, une existence particulière. Kirchhoff contesta cette nécessité, et pensa pouvoir se contenter de la seule hypothèse de la matière, ainsi que du fait de son mouvement selon des lois déterminées à décrire. Il conserva cependant l'action directe à distance. Mais si nous nous demandons sérieusement ce qui subsiste de celle-ci d'après nos conceptions d'aujourd'hui, nous ne trouvons pas grand-chose. Les forces électriques et magnétiques n'agissent pas à distance, mais d'élément de volume à élément de volume. Des forces élastiques et chimiques, de

l'adhérence et de la cohésion, dont le domaine d'action est extrêmement petit, on ne peut montrer aucune action directe à distance. Il ne reste que la gravitation, mais ici aussi l'analogie d'action avec les forces électriques et magnétiques fait apparaître comme vraisemblable la transmission par un milieu.

» Alors que Newton lui-même ne présentait l'action à distance que comme un pis-aller, l'édifice entier de la mécanique classique a été cependant taillé sur cette idée. Il n'est donc pas surprenant que Hertz ait cherché à reprendre cet édifice à la base et à substituer des équations de condition aux actions accélératrices. Mais Hertz construit aussi la mécanique à partir de points matériels. Ceux-ci n'exercent, il est vrai, aucune action à distance, mais les conditions qui existent entre eux relient ensemble, sans aucun intermédiaire, des points éloignés. Hertz substitue ainsi, dans une certaine mesure, des équations de condition à distance aux actions à distance.

» Brill a essayé d'appliquer à des continus la méthode de Hertz ; il est ainsi parvenu à obtenir, par cette voie, les équations du mouvement des fluides incompressibles. On pourrait encore, avec Lord Kelvin, expliquer les phénomènes en de tels fluides par un échange d'anneaux de tourbillon ou d'autres images de mouvement, et introduire aussi dans ces fluides des formations rigides. On aurait ainsi obtenu en fait une image de l'ensemble des phénomènes sur la base de la mécanique de Hertz. Mais on voit aussitôt que le résultat n'est pas très différent des vieilles images fantaisistes du monde. Le gain serait loin d'être aussi grand que le promettait la belle fondation philosophique de la mécanique de Hertz. Mais on n'a pas su, jusqu'à présent, exposer celle-ci d'une autre manière plus dégagée d'hypothèses [1]. »

Boltzmann voit enfin dans l'hypothèse de l'existence des électrons un symbole de la structure atomique de la matière :

« Alors que le point de vue moderne, en électromagnétisme, engageait à chercher exclusivement le salut dans l'action des éléments de volume sur leurs voisins, certains phénomènes observés sur les rayons cathodiques et en électrolyse ont conduit, plus récemment encore, à l'hypothèse que l'électricité elle-même possède une structure atomique et est constituée d'éléments discrets, les électrons. On voit donc que la vieille antinomie kantienne, l'opposition entre la divisibilité à l'infini de la matière et la constitution atomique de celle-ci, tient encore la science en haleine. Nous ne considérons pas, pour le moment, que ces deux points de vue soient chargés de contradictions logiques internes au regard des lois de la pensée, mais nous verrons en chacun d'eux une construction

[1] [17], pp. 327-329.

de l'esprit et nous demandons laquelle de ces deux constructions peut être suivie le plus clairement et le plus facilement et peut reproduire les phénomènes avec un maximum d'exactitude et un minimum d'ambiguïté [1]. »

Boltzmann revient encore sur la tendance à donner le pas à la théorie électromagnétique sur la mécanique dans la leçon inaugurale donnée à Vienne en 1902, à laquelle nous avons déjà fait allusion :

« Les difficultés que présentait l'explication purement mécanique du magnétisme et de l'électricité firent douter que tout soit mécaniquement explicable, et l'électromagnétisme gagna toujours en importance, non seulement dans le domaine de la pratique, mais dans celui de la théorie. Enfin sa puissance devint si grande qu'on fut conduit à retourner le fer, et à chercher à expliquer électromagnétiquement la mécanique. Tandis qu'auparavant on cherchait à expliquer le magnétisme et l'électricité par le mouvement de rotation ou d'oscillation des plus petites parties des corps, on en arrive maintenant à déduire des lois de l'électromagnétisme les lois fondamentales du mouvement des corps...

» Il y a peu de temps encore, la loi d'inertie était tenue pour la première loi fondamentale de la nature, en elle-même inexplicable, mais nécessaire à l'explication de tous les phénomènes. Or, il résulte des équations électromagnétiques de Maxwell qu'une particule électrique en mouvement, sans posséder elle-même de masse ou d'inertie, doit se mouvoir sous la seule action de l'éther environnant, exactement comme si elle possédait une inertie. On fit alors l'hypothèse que les corps n'ont aucune inertie, mais sont constitués exclusivement de particules électriques sans masse, les électrons, en sorte que l'inertie serait une pure apparence, due à l'action de l'éther environnant sur les électrons lors de leur mouvement. D'une façon analogue, on parvint à ramener également à des phénomènes électromagnétiques l'action des forces mécaniques. Ainsi tandis qu'autrefois on voulait expliquer tous les phénomènes par l'action de mécanismes, l'éther est maintenant considéré comme un mécanisme, en soi tout à fait obscur, mais qui doit expliquer l'action de tous les mécanismes. On ne veut donc plus tout expliquer mécaniquement, mais on cherche bien davantage un mécanisme susceptible d'expliquer tous les mécanismes *(einen Mechanismus zur Erklärung aller Mechanismen)* [2]. »

Et portant le débat sur le terrain philosophique, Boltzmann se demande en quoi consiste la véritable compréhension d'un mécanisme. Sur le terrain pratique, le simple fait de savoir utiliser correctement un

[1] [17], p. 329.
[2] *Ibid.*, pp. 334-335.

mécanisme suffit. Boltzmann va plus loin et affirme que le même critère fournit la seule définition valable de la compréhension d'un mécanisme (au sens abstrait). Peu importe le mode de formation des concepts, pourvu qu'on en fasse une utilisation correcte.

C'est une illusion du solipsisme que de croire que le monde n'a aucune réalité et n'est qu'un produit de notre imagination. « J'ai moi-même, avoue Boltzmann, sacrifié à cette lubie en négligeant le point de vue pratique, et cela ne m'a pas réussi. A ma plus grande joie, car j'y ai trouvé la preuve que je cherchais de l'existence du monde extérieur, par la simple raison que si on met cette existence en doute on est d'autant moins apte à agir correctement [1]. »

Et Boltzmann de conclure que la mécanique ne saurait être à base de mécanisme *(dass die Mechanik nichts mechanisches sei)*, mais qu'en dépit des difficultés qu'elle présente et de l'immense effort de pensée que sa formation a exigé des plus grands esprits pendant des siècles, elle traîne encore avec soi des traces de mécanisme.

[1] [17], p. 336.

CHAPITRE V

Sur les méthodes de la physique théorique

Boltzmann, qui était avant tout un chercheur, reproche aux esprits de son temps de trop sacrifier à la critique des méthodes et des principes. Il le fait en des termes particulièrement heureux, où les allusions à la philosophie kantienne sont transparentes :

« Notre temps est caractérisé par une critique presque excessive des méthodes de recherche en philosophie naturelle. J'oserais dire, si cela n'était pas par trop impertinent, que cette critique élève à une puissance supérieure la critique de la raison pure. Il n'est pas dans mes intentions de faire encore la critique de cette critique [1]. »

Boltzmann souligne encore le caractère nominal de la doctrine de Mach :

« Mach soutient l'opinion radicale que le but de la science ne serait qu'économie d'effort. C'est là, en dernière analyse, affaire de définition, aussi bien de la tâche à accomplir que des moyens d'y parvenir [2]. »

Et voulant examiner pour sa part les méthodes de la physique théorique, Boltzmann se place dans la perspective historique, en remontant tout d'abord à l'âge d'or de la mécanique classique :

« Sur les fondements édifiés par Galilée et Newton, les grands mathématiciens de l'école de Paris, à l'époque de la grande Révolution et après celle-ci, avaient créé une méthode très précise de physique théorique. On formulait des hypothèses au moyen desquelles un groupe de phénomènes pouvait être expliqué à l'aide des principes de la mécanique, considérés comme dotés d'une sorte d'évidence géométrique. On savait fort bien que ces hypothèses ne pouvaient être tenues pour exactes avec une certitude apodictique, mais on tenait pour vraisemblable qu'elles correspondissent dans une certaine mesure à la réalité. On imaginait ainsi la matière, l'éther indispensable à l'explication des phénomènes

[1] [4], p. 1.
[2] *Ibid.*, p. 2.

lumineux et les deux fluides électriques comme formés de points mathématiques entre lesquels s'exerçaient des forces fonctions déterminées de la distance (Boscovich). Un esprit qui connaîtrait toutes les positions et vitesses initiales de ces points et qui saurait intégrer les équations différentielles de leurs mouvements pourrait prédire par le calcul tout le cours du monde (Laplace). On n'hésitait pas à concevoir ces forces comme des données premières...[1] »

La thermodynamique fondée sur le mouvement des particules constituant un corps, développée par Clausius dans le cas des gaz, appartient à la catégorie des explications mécanistes. Elle devait, avec Maxwell, conduire à des résultats remarquables, comme l'indépendance de la constante de frottement à l'égard de la pression, et l'existence de relations entre le frottement, la diffusion et la transmission de la chaleur.

L'hypothèse de Darwin semblait devoir promettre l'extension des méthodes explicatives de la physique théorique à des sciences tenues jusque-là comme purement descriptives.

Mais en dépit des conquêtes des modèles mécaniques, une réaction devait se produire. Déjà la théorie de l'élasticité s'était dépouillée d'hypothèses moléculaires avec Stokes, Lamé et Clebsch. Kirchhoff aurait voulu voir disparaître la notion de force, entendue comme cause du mouvement. Dans d'autres domaines (électrodynamique, pyro- et piézo-électricité) s'affirmait plus vivement encore la tendance à renoncer aux images mécaniques.

« Selon l'expression de Hertz, il convenait de traduire les apparences directement observées par des équations toutes nues, sans le manteau bigarré d'hypothèses créées par pure imagination[2]. »

A cette tendance, Boltzmann oppose celle des chercheurs — au nombre desquels sans doute il devait se compter — qui, tout en ayant une prédilection marquée pour le manteau bigarré des hypothèses mécanistes, se rapprochaient de Hertz en ce sens qu'ils acceptaient de renoncer à connaître le véritable mécanisme sous-jacent aux phénomènes, et de considérer les modèles qu'ils concevaient comme de simples images ou de simples analogies, sans prétendre traduire ainsi les voies de la Nature[3].

Les modèles mécaniques traditionnels, où les centres de force étaient considérés comme une réalité, et les forces elles-mêmes comme des

[1] [4], pp. 3-4.

[2] *Ibid.*, p. 5.

[3] A ce propos, Boltzmann souligne l'opposition entre la théorie de l'élasticité de Kirchhoff, « d'une finesse presque éthérée, d'une clarté cristalline, mais totalement dépourvue de couleur » et la théorie délibérément réaliste de Thomson, ne traitant pas du solide idéal, mais de l'acier, du caoutchouc, de la colle, ou encore le langage « puérilement naïf » de Maxwell, qui n'hésite pas, entre deux équations, à indiquer la bonne méthode pour enlever une tache de graisse.

concepts mathématiques, devaient subir d'autre part l'assaut des idées de Faraday. Celui-ci dote le potentiel, qui n'était autrefois considéré que comme un simple élément de calcul, d'une existence réelle et y voit la cause de l'action des forces à travers l'espace. Ces conceptions de Faraday demeuraient assez vagues et ne devaient prendre de forme mathématique précise que grâce à Maxwell.

L'école anglaise devait encore, par des représentations géométriques variées, révéler le pouvoir d'unification de l'analyse mathématique entre les différentes théories physiques :

« Les analogies les plus surprenantes et les plus profondes se révélèrent entre les processus naturels en apparence les plus disparates. La Nature semblait avoir, dans une certaine mesure, construit les objets les plus différents exactement suivant le même plan, ou comme l'analyste le dit sèchement, les mêmes équations différentielles valaient pour les phénomènes les plus variés.

» Ainsi la transmission de la chaleur, la diffusion et la propagation de l'électricité dans les conducteurs ont lieu suivant les mêmes lois. Les mêmes équations peuvent être considérées comme résolvant un problème d'hydrodynamique. La théorie des tourbillons fluides, ainsi que celle du frottement des gaz, montre l'analogie la plus frappante avec l'électromagnétisme [1].

» De semblables influences devaient pousser Maxwell, lorsqu'il s'employa au traitement mathématique des idées de Faraday et cela dès le début, dans une voie entièrement nouvelle. Thomson avait déjà, en 1847, mis en évidence une série d'analogies entre les problèmes de la théorie de l'élasticité et ceux de l'électromagnétisme. Dès son premier mémoire sur l'électricité *(On Faradays lines of force*, [3]*)*, Maxwell expliquait qu'il n'avait pas l'intention de donner une théorie de l'électricité, c'est-à-dire qu'il ne croyait pas lui-même à la réalité du fluide incompressible et des forces de résistance qu'il suppose, mais qu'il entendait simplement offrir un modèle mécanique présentant une grande analogie avec les phénomènes électriques et traduire ceux-ci sous une forme qui les rende aussi compréhensibles que possible. Dans son second écrit *(On physical lines of force*, [4]*)*, Maxwell va beaucoup plus loin et construit, à l'aide de tourbillons fluides et de rouleaux de friction qui se meuvent à l'intérieur de cellules à parois élastiques, un extraordinaire mécanisme, qui lui sert de modèle pour l'étude de l'électromagnétisme. Ce mécanisme fut naturellement tourné en dérision par ceux qui voulaient y voir une hypothèse au sens traditionnel du terme et qui pensaient que Maxwell avait pu souscrire à sa réalité, alors qu'il s'en abstenait formellement et se conten-

[1] MAXWELL, *Scientific papers*, [3], vol. I, p. 156.

tait d'exprimer l'espoir que les recherches ultérieures dans le domaine de l'électricité seraient plus facilitées qu'entravées par de semblables fictions mécaniques.

» Et ces recherches devaient effectivement y gagner, car c'est à l'aide de ces modèles que Maxwell parvint à ces équations dont le pouvoir magique propre, quasi incompréhensible, a été affirmé de façon si drastique par l'homme le plus compétent pour en juger, H. Hertz, dans son exposé sur les rapports entre la lumière et l'électricité [1]. Je voudrais seulement ajouter aux déclarations de Hertz que les formules de Maxwell étaient de pures conséquences de ses modèles mécaniques [2] et que l'éloge de Hertz n'est pas dû en première ligne à l'analyse de Maxwell, mais à la sagacité dont celui-ci a fait preuve dans la découverte d'analogies mécaniques.

» C'est seulement dans le troisième mémoire fondamental de Maxwell [3] et dans son Traité [4] que les formules se libèrent davantage de la gangue du modèle *(schälen sie die Formeln mehr von dem Modelle los)* [5], processus qui devait être complété par Heaviside, Poynting, Rowland, Hertz et Cohn. Maxwell recourt toujours à une analogie mécanique ou, selon sa propre expression, à une illustration dynamique. Mais il ne spécifie plus celle-ci en détail, et recherche plutôt les hypothèses mécaniques les plus générales susceptibles de conduire à des phénomènes analogues à ceux de l'électromagnétisme...

[1] [1], p. 11.

[2] Boltzmann, qui voyait dans l'extraordinaire modèle de Maxwell le levier même de sa pensée créatrice, se trouve ici en opposition avec Duhem, lequel devait contester que ce modèle ait joué un véritable rôle :

« Il ne paraît pas que le modèle des actions électrostatiques et électromagnétiques, construit dans le mémoire *On physical Lines of Force*, ait aidé Maxwell à créer la théorie électromagnétique de la lumière. Sans doute, il s'efforce de tirer de ce modèle les deux formules essentielles de la théorie ; mais la manière même dont il dirige ses tentatives montre du reste que les résultats à obtenir lui étaient connus par ailleurs ; dans son désir de les retrouver coûte que coûte, il va jusqu'à fausser l'une des formules fondamentales de l'élasticité. Il n'a pu créer la théorie qu'il entrevoyait qu'en renonçant à l'emploi de tout modèle, qu'en étendant, par voie d'analogie, aux courants de déplacement le système abstrait de l'Electrodynamique. » ([3], pp. 143-144.)

On connaît d'autre part, la déclaration, si souvent citée, de Hertz :

« A cette question : Qu'est-ce que la théorie de Maxwell, je ne saurais donner de réponse à la fois plus nette et plus courte que celle-ci : La théorie de Maxwell, c'est le système des équations de Maxwell. » (*Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft*, Leipzig, 1892, p. 23, [2].)

[3] *A dynamical theory of the electromagnetic field*, Scientific papers, vol. I, p. 526, [7].

[4] *Treatise on electricity and magnetism*, Oxford, Clarendon Press, 1881, [1].

[5] Cette formule pourrait s'appliquer à l'évolution de la pensée de Boltzmann en théorie cinétique, comme cela apparaît clairement en comparant la généralité des considérations de la seconde partie de la *Gastheorie* (théorèmes de Mécanique générale nécessaires à la théorie des gaz) à l'analyse détaillée des chocs entre des molécules considérées soit comme des sphères élastiques, soit comme des centres de force, analyse faisant l'objet de la première partie de la *Gastheorie*.

» Maxwell devait naturellement appliquer le même traitement à d'autres branches de la physique théorique. Comme exemple d'autres analogies mécaniques, on doit citer les molécules de gaz considérées par Maxwell comme se repoussant selon une force inversement proportionnelle à la cinquième puissance de leur distance mutuelle ; il ne manqua pas, à l'origine, de savants qui, par incompréhension de l'intention de Maxwell, devaient considérer cette hypothèse comme invraisemblable, voire absurde.

» Cependant, ces idées nouvelles devaient prendre droit de cité dans tous les domaines. En ce qui concerne la thermodynamique, je mentionnerai seulement les célèbres mémoires de Helmholtz sur les analogies mécaniques du second principe. Il devait se révéler que ces idées correspondaient mieux, en vérité, à l'esprit de la science que les anciennes hypothèses et qu'elles étaient aussi plus maniables. Car des hypothèses (au sens traditionnel) ne pouvaient être tenues pour exactes que si elles demeuraient conciliables entre elles. Au contraire, des désaccords isolés étaient dorénavant sans inconvénient, car on ne peut faire grief à de simples analogies de clocher sur quelque point [1]. Bientôt les théories anciennes elles-mêmes, comme la théorie élastique de la lumière, la théorie des gaz, les schémas des chimistes pour les chaînes cycliques, etc... furent considérées comme de simples analogies mécaniques et la philosophie des idées de Maxwell fut généralisée jusqu'à en tirer la leçon que la connaissance n'est rien d'autre que la découverte d'analogies. Ainsi

[1] Une liberté analogue était admise par Poincaré : « On ne doit pas se flatter d'éviter toute contradiction ; mais il faut en prendre son parti. Deux théories contradictoires peuvent, en effet, pourvu qu'on ne les mêle pas, et qu'on n'y cherche pas le fond des choses, être d'utiles instruments de recherche et peut-être la lecture de Maxwell serait-elle moins suggestive s'il ne nous avait pas ouvert tant de voies nouvelles divergentes. » (*Electricité et Optique*, I, p. IX, [1].)

Duhem n'admettait pas de telles libertés. A ses yeux, une théorie physique doit essentiellement constituer un *système logique*. La science ne doit pas se laisser contaminer par « l'utilitarisme », par les « formes inférieures et dégradées des théories d'imagination ». Seuls « les *principes abstraits et généraux* peuvent guider l'esprit en des régions inconnues et lui suggérer la solution de difficultés imprévues ».

Le souci de Duhem nous apparaît ici plus critique que moteur. Sans même parler de physique, le seul fait que les mathématiques pures progressent souvent par la révélation de contre-exemples imprévus qui viennent remettre en cause une théorie généralement reçue, révèle que, dans la science en apparence la plus abstraite, la liberté de l'imagination du chercheur est bien l'une des clefs essentielles du progrès.

Louis de Broglie a exposé d'une façon lumineuse à quel point le souci d'éviter toute pétition de principe conduisait ainsi Duhem à priver la théorie physique de toute signification intuitive. Quelles que soient les nuances, souvent difficiles à saisir, de sa pensée, il est permis d'estimer que Duhem a montré quelque injustice à l'égard du rôle des « imaginatifs » (dont Maxwell et Boltzmann sont des représentants typiques) dans la construction des théories physiques, par opposition à l'apport des esprits avant tout soucieux « d'axiomatisation et de déduction logique parfaitement rigoureuse ». (*Nouvelles perspectives en Microphysique*, Albin Michel éd., Paris, 1956, pp. 316-327, [7].)

la méthode traditionnelle fut repensée et la science ne parla plus que par comparaisons.

» Tous ces modèles mécaniques n'avaient d'existence que dans notre esprit, ils constituaient des illustrations dynamiques de notre imagination et ne pouvaient être construits pratiquement dans leur généralité. Mais leur grande signification incitait à en réaliser pratiquement du moins les types principaux [1]. »

Et après avoir mentionné les modèles de Fitzgerald, Bjerkne, Oliver Lodge, Lord Rayleigh, Boltzmann pouvait conclure à l'impossibilité d'établir une parfaite congruence avec la Nature en donnant une telle prédominance à de semblables analogies. Mais autant, autrefois, on avait tort de considérer l'ancienne méthode mécaniste comme la seule valable, autant il serait partial d'abandonner celle-ci, qui a tant produit, et de cesser de la cultiver parallèlement aux idées nouvelles.

[1] [4], pp. 7-10.

CHAPITRE VI

Bref rappel des thèses de l'énergétique

Pour comprendre la vigueur, parfois même la violence, des critiques de Boltzmann à l'égard des tenants de l'énergétique, qui régnaient alors sans conteste sur toute l'école allemande et même en Europe, et qui avaient prononcé *ex cathedra*, à l'égard des théories mécanistes et *a fortiori* de l'atomistique, des interdits contre lesquels Boltzmann était pratiquement seul à s'élever, il n'est sans doute pas inutile, encore qu'elles soient fort connues, de rappeler brièvement les thèses dont Ostwald s'était fait le champion et que Duhem professait en France avec plus de mesure sans doute, mais autant de rigueur dans la condamnation du rêve mécaniste.

L'énergétique pouvait à bon endroit présenter ses lettres de noblesse en se réclamant de Leibniz, lequel, sous le vocable de *force*, avait en fait introduit l'énergie comme une notion première et fondamentale dans le champ de la mécanique, par opposition à la doctrine cartésienne des quantités de mouvement. Ostwald pouvait ainsi, fort justement, citer telle lettre du grand métaphysicien au Marquis de l'Hospital (15 janvier 1696) :

« Vous voyez que le principe de l'égalité de la cause et de l'effet, c'est-à-dire l'exclusion du mouvement perpétuel, est à la base de mon évaluation de la force. Celle-ci se maintient, en vertu de ce principe, dans une immuable identité, c'est-à-dire qu'il y a toujours conservation de la quantité qui est nécessaire pour produire une action déterminée, pour élever un poids à une hauteur déterminée, pour tendre un ressort, pour communiquer une vitesse déterminée, sans que, dans tout le cours de l'action, le plus petit gain ni la plus petite perte puissent être faits, bien que, sans doute, une partie de cette force, partie dont on ne doit jamais négliger de tenir compte, soit absorbée par les particules imperceptibles du corps lui-même ou par ce qui l'entoure. Au contraire, il n'y a pas d'indice que la quantité de mouvement se conserve dans la nature. Pour les corps que nous pouvons observer dans la nature, l'expérience contre-

dit l'hypothèse de la conservation de la quantité de mouvement, et le raisonnement ne nous montre pas de motif pour admettre une pareille conservation dans les parties imperceptibles de la matière, où nous devons toujours supposer qu'il se produit, toutes proportions gardées, les mêmes actions que dans les corps sensibles et visibles. Mais, en ce qui concerne ceux-ci, l'opinion que je défends ici ne se fonde évidemment pas sur des expériences relatives au choc, mais sur des principes qui rendent raison de ces expériences elles-mêmes et qui permettent de se prononcer sur des cas au sujet desquels on n'a pas encore institué d'expériences ni formulé des règles, et la seule et unique source de ces principes, c'est celui de l'égalité de la cause et de l'effet [1]. »

En revanche, Ostwald était moins fondé à se réclamer de Newton, en tant que fondateur d'une physique délivrée des hypothèses, et de ce fait précurseur de « l'esprit moderne », c'est-à-dire de la phénoménologie positiviste ou s'inscrit l'énergétique. Nous savons en effet que le trop célèbre slogan : *Hypotheses non fingo* ne traduisait qu'un repli tactique destiné à éviter à son auteur les polémiques dont il avait tant souffert à propos de la théorie de la lumière et que Newton, qui a été un véritable visionnaire, doit être compté, avec Descartes, parmi les plus grands créateurs d'hypothèses de son siècle [2]. On peut même ajouter que la mécanique de Newton, ne reconnaissant aucun principe général de conservation en dehors du principe de l'inertie, est en fait la moins énergétique qui soit.

Ce n'est guère qu'au XIXe siècle que l'héritage de Leibniz devait fleurir dans le domaine de l'énergétique. Ostwald met au premier rang Robert Mayer, médecin de son état, et dont la première méditation sur ce sujet fut provoquée par l'observation de la couleur du sang des veines chez des marins naviguant sous les tropiques, traduisant une combustion incomplète de l'oxygène.

Pour revenir à la physique, Mayer oppose la *force* à la matière pondérable et impénétrable :

« *Les forces sont des objets indestructibles, variables et impondérables.*

» Une cause qui détermine l'élévation d'un poids est une force : son effet, le *poids élevé*, est également *une force* ; exprimant ce fait d'une façon plus générale, nous dirons : *toute différence spatiale d'objets pondérables est une force* ; comme cette force détermine la chute des corps, nous l'appelons *force de chute*...

[1] Notons au passage que Huygens, pour cartésien qu'il ait été de formation, avait eu lui-même recours, avant Leibniz, à des principes énergétiques pour résoudre par exemple le célèbre problème du centre d'oscillation.

[2] Voir à ce sujet notre *Mécanique au XVIIe siècle*, [2], Le Griffon éd., Neuchâtel, et Dunod éd., Paris, 1954, chapitre XII.

» Une force ne peut pas devenir nulle ; elle ne peut que prendre une autre forme...

» Frottons deux plaques de métal l'une contre l'autre : nous verrons du mouvement disparaître et par contre de la chaleur apparaître...

» Puisqu'il est avéré que dans beaucoup de cas (l'exception confirme la règle) on ne peut pas trouver pour le mouvement qui disparaît d'autre effet que la chaleur, ni pour la chaleur qui a pris naissance d'autre cause que le mouvement, nous préférons admettre que la chaleur naît du mouvement, plutôt que d'admettre une cause sans effet ou un effet sans cause.

» Il faut trouver, par exemple, à quelle hauteur au-dessus du sol un poids déterminé doit être élevé pour que sa force de chute soit équivalente à la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 0° C à 1° C le même poids d'eau [1]. »

Et Mayer parvient à l'équivalence suivante : à la chute d'un poids d'une hauteur de 369 m environ correspond la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 0° à 1° la température d'un même poids d'eau.

Mayer conçoit les forces — c'est-à-dire l'énergie — comme une substance. La force est pour lui une réalité, un être d'une espèce déterminée et particulière ; son indestructibilité et son incréabilité sont des marques de sa réalité. Tout cela, à vrai dire, est très leibnizien.

Pour mettre cette réalité en relief le mieux possible, Mayer *disjoint l'énergie de la matière* ; d'après lui, il y a d'un côté les objets indestructibles et pondérables, qui sont des matières, et de l'autre les objets indestructibles et impondérables, qui sont les énergies.

Ostwald nous dit qu'à l'origine (1842), la définition des forces que Mayer avait proposée ne fut acceptée par personne. Considérant la chaleur et les autres formes non mécaniques comme des états de mouvement des particules de la matière, tous les autres chercheurs essayèrent de ramener toute énergie à l'énergie mécanique.

Mayer, pour sa part, écartait l'hypothèse selon laquelle l'essence de la chaleur serait le mouvement : « Nous conclurions plutôt le contraire, c'est-à-dire que, pour pouvoir se transformer en chaleur, le mouvement doit cesser d'être du mouvement [2]. »

Aux yeux d'Ostwald, un des traits qui contribuent à faire de Mayer « un véritable énergétiste, un énergétiste ayant l'esprit moderne, c'est son aversion pour les hypothèses ». Et il poursuit :

« Il importe de faire ressortir une fois de plus une différence dont ne tiennent pas compte les nombreux amateurs d'hypothèses qui se trouvent aujourd'hui encore parmi les hommes de science. Ils ne manquent

[1] Cité par W. Ostwald, *L'énergie*, [1], pp. 65, 67, 71.
[2] *Ibid.*, p. 130.

pas de faire remarquer, chaque fois que l'occasion s'en présente que, lorsqu'on établit une loi naturelle, quelle qu'elle soit, on fait une hypothèse, puisqu'on admet, sans pouvoir le prouver, que les choses se passeront dans l'avenir comme elles se sont toujours passées jusqu'au moment où on est. Je réponds que ce n'est pas là une véritable hypothèse. Les hypothèses sont des suppositions invérifiables, tandis que les suppositions scientifiques que j'ai proposé, il y a quelques années déjà, d'appeler *protothèses*, sont établies dans le but d'être vérifiées et possèdent, par conséquent, la propriété inverse, celle d'être vérifiables.

» Ainsi une supposition appartiendra ou n'appartiendra pas à la catégorie de celles que condamnent Newton et Mayer suivant qu'elle sera ou non impossible à vérifier [1]. »

Revenons au dualisme matière-énergie ; tout en préfigurant Einstein, Ostwald va beaucoup plus loin dans la condamnation de la matière et dans les conséquences philosophiques de la primauté de l'énergie :

« Si aujourd'hui un physicien ou un chimiste veut se montrer homme de progrès, il déclare que la matière et l'énergie sont deux entités semblables ou parallèles, et il définit les sciences physiques comme les sciences de la transformation de ces deux choses indestructibles, la matière et l'énergie, sans savoir, la plupart du temps, qu'il ne fait que reproduire la conception de Mayer. On verra que le dualisme matière-énergie lui-même peut être supprimé, attendu que la notion de matière est une notion qui n'est même pas particulièrement heureuse.

Bien entendu, le dualisme esprit-matière disparaît du même coup, et la question se pose de savoir quelle est la relation de l'énergie avec l'esprit. Eh bien ! — et c'est là le progrès le plus considérable qui ait été réalisé dans cet ordre d'idées — au regard de la science ces deux notions sont de même espèce, et la notion d'esprit se fond dans celle d'énergie [2]. »

Quittons là ces sommets, et revenons, toujours avec Ostwald, à la genèse de l'énergétique. Avec une pointe de nationalisme, Ostwald dessine ainsi le portrait de Joule :

« James Prescott Joule était un de ces savants amateurs qui ne se voient guère qu'en Angleterre. Il était propriétaire d'une grande brasserie près de Manchester, et les revenus qu'il en tirait lui permettaient de s'adonner à la science. Son tour d'esprit, comme celui de tant de ses compatriotes, était mi-pratique, mi-scientifique.

» Joule étudia séparément tous les facteurs relatifs au cas d'une machine actionnée par un courant électrique... Ce qui l'intéressa par-dessus tout, c'est le développement de chaleur qui se produisit dans les

[1] [1], p. 132.
[2] *Ibid.*, p. 75.

fils de ses appareils, car il ne tarda pas à constater qu'il y avait un rapport déterminé entre la quantité de chaleur qui s'y développait et la quantité de produits chimiques consommée dans les éléments galvaniques...

» De ses expériences, où il transforma du travail en chaleur des manières les plus diverses possibles, Joule tira la conclusion qu'il existait un rapport invariable entre le travail et la chaleur. Il publia sa découverte en 1843, c'est-à-dire un an seulement après qu'eut paru le premier mémoire de Mayer [1]. »

Mais le tort essentiel de Joule aux yeux d'Ostwald, c'est d'être demeuré fidèle à la tradition des explications mécanistes :

« [Pour Joule] la chaleur était, comme le travail, de nature mécanique ; elle consistait pour lui en un mouvement des particules composant la matière, c'est-à-dire des atomes ou des molécules. Dans cette hypothèse, la transformation du travail en chaleur serait un phénomène tout semblable à celui de la transformation du travail en force vive d'espèce ordinaire ou visible, en sorte que la loi d'équivalence serait « expliquée ». Cette explication de la loi en question est aussi peu satisfaisante que toutes celles en vue desquelles on a imaginé des hypothèses spéciales, car elle ne dit rien que ne renferme déjà le fait à expliquer. Mais elle fut accueillie avec empressement, parce qu'elle rattachait un fait nouveau à un fait connu depuis longtemps ; c'est là, du reste, la raison psychologique du succès généralement obtenu par de pareilles explications [2].»

Ostwald fait à Helmholtz, qui cependant avait rendu tant de services à la cause énergétique, un reproche analogue :

« H. Helmholtz montre que tous les systèmes mécaniques sont soumis à la loi de la conservation de l'énergie (qui est alors soit de la force vive, soit de la *force de tension*), si les forces de tension agissant dans ces systèmes s'exercent suivant les lignes qui joignent les particules agissantes et ne sont, par ailleurs, fonction que des distances de ces particules entre elles... Si Helmholtz s'élève bien au-dessus du point de vue commun à presque tous les savants de son époque [en regardant la loi de conservation de la force comme essentielle à la physique], il y redescend quand il dit que la tâche de la physique est de ramener tous les phénomènes à la mécanique [3]. »

Mais Ostwald est beaucoup plus sévère encore à l'égard de Rankine :

« On ne peut guère regarder comme un énergétiste l'homme auquel la science de l'énergétique doit son nom. Cet homme, c'est l'ingénieur anglais Macquorn Rankine qui, en 1855, publia l'ébauche d'une science

[1] [1], pp. 76-78.
[2] *Ibid.*, p. 79.
[3] *Ibid.*, pp. 81-82.

qu'il nommait énergétique [1]. Dans ce travail, il prétendait embrasser, au moyen de quelques principes généraux, tout l'ensemble de la physique et de la chimie. A cet égard, il est tout à fait comparable à Mayer... Mais ce qui le distingue de Mayer, c'est qu'il s'en tient absolument à l'hypothèse mécaniste de Joule et de Helmholtz, méconnaissant ainsi ce qu'il y a d'essentiel dans la véritable énergétique, à savoir qu'elle n'a besoin de recourir à aucune hypothèse.

» On trouve, aujourd'hui encore, dans la nomenclature employée en énergétique, des traces des idées erronées propagées par Rankine : nous voulons parler de cette distinction entre l'*énergie actuelle* et l'*énergie potentielle* qu'il a introduite dans la science et qui a été adoptée ensuite par Thomson et par beaucoup d'autres auteurs. S'il a fait cette distinction, il faut naturellement en chercher la cause dans l'hypothèse mécaniste. D'après cette hypothèse, toute énergie est soit une force vive, soit une force de tension. Donnons-en un exemple. Une masse déterminée a, suivant Rankine, de la force de tension quand elle se trouve au-dessus du sol et peut, par conséquent, fournir du travail par sa chute ; elle a de la force vive lorsqu'elle a parcouru la distance qui la séparait du sol, et qu'elle a pris, par suite, une certaine vitesse, une vitesse proportionnelle à cette distance ; enfin, son énergie se compose des deux sortes d'énergie ci-dessus lorsque sa chute est en train de s'effectuer...

» Ce qui montre le mieux combien est peu nette la distinction faite par Rankine entre les énergies actuelles et les énergies potentielles, distinction que l'on voit encore reproduite dans beaucoup d'ouvrages récents, c'est qu'il y a un certain nombre d'énergies bien connues au sujet desquelles on est loin de s'accorder, les uns les considérant comme actuelles, les autres comme potentielles. On voit par là qu'il n'existe pas de signe objectif auquel on puisse reconnaître si une énergie est actuelle ou potentielle. C'est en vertu d'une convention arbitraire que l'on regarde, par exemple, l'énergie chimique comme potentielle, et on aurait bien de la peine à indiquer ce qui empêcherait de la considérer comme actuelle.

» La seule manière légitime de comprendre les mots énergie actuelle et énergie potentielle, c'est de regarder comme actuelle une énergie présente au moment considéré, et comme potentielle une énergie qui, dans les circonstances présentes, peut se former au moyen de l'énergie présente [2]. »

Et cependant Rankine trouve grâce sur un point aux yeux d'Ostwald :

« Si nous refusons toute valeur, au point de vue du développement de l'énergétique, aux idées de Rankine qui, d'ailleurs, manquent de clarté,

[1] *Outlines of the Science of Energetics*, *Glasgow Philosophical Society Proceedings*, vol. III, N° 6, 2 mai 1855. *Miscellaneous Papers*, [1], p. 209.

[2] [1], pp. 133-135.

la justice veut que nous fassions une exception pour l'une d'entre elles. Cette idée ne l'a pas conduit, il est vrai, à des résultats nets, mais d'autres en ont tiré un parti important. Il a fait observer que les énergies les plus diverses peuvent *toutes être représentées par le produit de deux facteurs*, dont chacun a un caractère qui le différencie nettement de l'autre, et qui est le même pour toutes les énergies. Appelant provisoirement *intensités* les facteurs d'une espèce et *extensités* ceux de l'autre, on dira que l'un des deux facteurs d'une énergie quelconque est de la nature d'une intensité et l'autre de la nature d'une extensité. Rankine avait présenté son observation d'une façon assez bizarre, mais elle n'en a pas moins joué un rôle très important dans l'édification de l'énergétique générale [1]. »

Voici en quels termes Ostwald affirmait sa foi en l'avenir de l'énergétique :

« La théorie énergétique relative à n'importe quel domaine scientifique ne sera jamais ruinée par les progrès que pourra faire la science, de même que ne seront jamais ruinés par les progrès de la science les théorèmes relatifs à la similitude des triangles. Tout ce qui pourra arriver aux lois énergétiques, c'est d'être élargies et précisées ; l'édifice qu'elles forment peut être embelli ; jamais il ne sera démoli et reconstruit. Ce qui a été à mainte reprise démoli et reconstruit — et il était inévitable qu'il en fût ainsi — ce sont les hypothèses mécanistes. Que l'on se rappelle seulement toutes les hypothèses, toutes les théories qui ont été faites sur la lumière [2]. »

Mieux, Ostwald affirme que « *c'est dans l'énergie que s'incarne le réel* :

» L'énergie est le réel dans un double sens. D'abord elle est le réel en ce qu'elle est *ce qui agit* ; quel que soit l'événement considéré, c'est indiquer sa cause que d'indiquer les énergies qui y prennent part. Ensuite elle est le réel en ce qu'elle permet d'indiquer le *contenu* de l'événement. Elle constitue un pôle immobile dans la mobilité des phénomènes, et, en même temps, la force d'impulsion qui fait tourner le monde des phénomènes autour de ce pôle [3]. Si un poète, après avoir cherché les plus grandes idées sur lesquelles méditent aujourd'hui les hommes, se plaignait qu'il n'y en eût plus pour les conduire à embrasser de vastes ensembles, je lui signalerais le concept d'énergie, le plus grandiose de ceux qui se sont fait jour au siècle dernier ; s'il savait chanter l'énergie en accents dignes du sujet, il ferait une épopée que l'on pourrait regarder à bon droit comme celle de l'humanité [4]. »

[1] [1], p. 136.
[2] *Ibid.*, p. 176.
[3] N'est-ce pas là une image mécaniste, et des plus gratuites ?
[4] [1], pp. V-VI.

Et le programme d'Ostwald était de montrer « comment l'énergétique permet de ramener à un point de vue unique les manifestations les plus diverses du savoir et du pouvoir humain, comment elle donne le moyen non seulement de comprendre le passé, et de juger du présent, mais encore de déterminer l'avenir [1]. »

Tel était le climat, et tels étaient les juges devant lesquels Boltzmann devait s'employer à défendre l'atomistique...

Nous trouverons chez Duhem plus de sérénité, et la thèse essentielle que la mécanique doit s'intégrer au cadre plus large de la thermodynamique, sans pour autant négliger les leçons de l'histoire.

« Pendant longtemps, observe Duhem dans l'Introduction à son *Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale*, [2], les physiciens ont supposé que les propriétés des corps se réduisaient, en dernière analyse, à des combinaisons de figures et de mouvements locaux ; les principes généraux auxquels doivent se soumettre toutes les propriétés physiques n'étaient autres, alors, que les principes qui régissent le mouvement local, principes qui composent la *Mécanique rationnelle*. La Mécanique rationnelle était le code des principes généraux de la Physique.

» La réduction de toutes les propriétés physiques à des combinaisons de figures et de mouvements ou, selon la dénomination en usage, l'*explication mécanique de l'Univers*, semble aujourd'hui condamnée. Elle n'est pas condamnée par des raisons *a priori*, métaphysiques ou mathématiques. Elle est condamnée parce qu'elle n'a été jusqu'ici qu'un projet, qu'un rêve, et non une réalité. Malgré d'immenses efforts, les physiciens ne sont jamais parvenus à concevoir un agencement de figures géométriques et de mouvements locaux qui, traités selon les règles de la Mécanique rationnelle, donne une représentation satisfaisante d'un ensemble quelque peu étendu de lois physiques.

» La tentative qui se propose de réduire toute la Physique à la Mécanique rationnelle, tentative qui fut toujours vaine dans le passé, est-elle destinée à réussir un jour ? Un prophète seul pourrait répondre affirmativement ou négativement à cette question. Sans préjuger de cette réponse, il paraît plus sage de renoncer, au moins provisoirement, à ces efforts, stériles jusqu'ici, vers l'explication mécanique de l'Univers.

» Nous allons donc tenter de formuler les lois générales auxquelles doivent obéir toutes les propriétés physiques, sans supposer *a priori* que ces propriétés soient toutes réductibles à la figure géométrique et au mouvement local. Le corps de ces lois ne se réduira plus, dès lors, à la Mécanique rationnelle.

» A la vérité, la figure géométrique et le mouvement local demeurent

[1] [1], p. VIII.

des propriétés physiques ; elles sont même celles de ces propriétés qui nous sont le plus immédiatement accessibles. Notre corps de lois générales devra s'appliquer à ces propriétés et, appliqué à ces propriétés, il devra nous redonner les règles qui déterminent le mouvement local, les règles de la Mécanique rationnelle. La Mécanique rationnelle doit donc résulter du corps de lois générales que nous nous proposons de constituer ; elle doit être ce qu'on obtient lorsqu'on applique ces lois générales à des systèmes particuliers où l'on ne tient compte que de la figure des corps et de leur mouvement local.

» Le code des lois générales de la Physique est connu aujourd'hui sous deux noms : le nom de *Thermodynamique* et le nom d'*Energétique*.

» Le nom de *Thermodynamique* se rattache étroitement à l'histoire de cette science ; ses deux principes les plus essentiels, le principe de Carnot et le principe de la conservation de l'énergie, ont été découverts en étudiant la puissance motrice des machines à feu. Ce nom se justifie encore par ce fait que les notions de *travail* et de *quantité de chaleur* sont constamment en jeu dans les raisonnements par lesquels cette doctrine se développe.

» Le nom d'*Energétique* est dû à Rankine ; l'idée d'*énergie* étant la première que cette doctrine ait à définir, celle à laquelle se rattachent la plupart des notions dont elle fait usage, ce nom ne nous paraît pas moins bien choisi que le nom de *Thermodynamique*. »

Pour Duhem, ces deux noms couvrent la même substance. Et il poursuit en rappelant les principes directeurs de la *Théorie physique* : les principes de la physique sont des postulats, librement choisis à la seule condition d'être cohérents entre eux ; seul l'*ensemble* de ces principes est soumis au contrôle de l'expérience, lequel en constitue l'unique critère de vérité. Entre temps, la théorie physique se développe librement dans le cadre de ses postulats. A vrai dire, ceux-ci ne sont pas choisis au hasard : ils ont tous quelque fondement historique dans les systèmes qui ont reçu une confirmation au moins partielle de l'expérience. Duhem ne prétend donc pas bâtir l'énergétique *ex nihilo* ; il n'en est pas moins rigoureux dans sa condamnation du mécanisme.

Tel était le « code » de théorie physique auquel se heurtait l'entreprise de Boltzmann.

Boltzmann devant l'énergétique

Nous en venons maintenant aux critiques de Boltzmann à l'égard des thèses de l'énergétique.

Dans un premier mémoire, intitulé *Ein Wort der Mathematik an die Energetik* (1896), [9], Boltzmann commence par noter la tendance de l'époque à bâtir une description des phénomènes aussi claire et aussi libérée d'hypothèses que possible, tout en parvenant à des lois précises ; tel était le but que s'étaient fixé Kirchhoff, Helmholtz, Clausius (dans sa thermodynamique générale), Hertz, Lord Kelvin, Gibbs, etc.

Parallèlement, et sans nier l'intérêt de cette tendance, on continuait avec beaucoup de succès à forger des images des phénomènes de l'élasticité, de l'hydrodynamique, de la lumière, de la chaleur et aussi, avec Maxwell, de l'électromagnétisme. Ces images étaient toujours empruntées au domaine de la mécanique, mais on n'élevait plus à l'état de dogme le principe que le monde extérieur fût susceptible d'une explication fondée sur le mouvement de simples points matériels. Par nature, ces modèles mécaniques demeuraient incomplets.

Mais, en revanche, les théorèmes généraux, pour être rendus applicables de façon claire et précise, nécessitaient à la fois des démonstrations et des formulations assez compliquées : témoins le principe d'Hamilton, le second principe de la thermodynamique et les théorèmes de Gibbs, et enfin les équations générales de l'électromagnétisme au sens de Maxwell et de Hertz.

« Tout récemment, déclare Boltzmann, quelques savants ont pensé pouvoir s'affranchir de ces complications et exprimer les lois fondamentales d'une façon beaucoup plus simple. Comme en dernière analyse ils arrivaient à doter exclusivement l'énergie d'une existence propre *(dass die Energie das eigentliche Existierende sei)*, ils se qualifièrent eux-mêmes d'énergétistes. Nous ignorons si notre conception actuelle de la nature est la plus adéquate ; le fait d'aspirer à un point de vue plus général et plus élevé que celui de la physique théorique actuelle est donc parfaitement

justifié. Mais les énergéticiens d'aujourd'hui ne se bornent pas à une semblable aspiration ; ils sont convaincus d'avoir déjà atteint un point de vue plus élevé et pensent que les méthodes et les moyens d'expression de la physique théorique (antérieure) doivent être dorénavant entièrement abandonnés, ou du moins modifiés dans leurs principes essentiels, opinion que je pense pouvoir réfuter dans ce qui suit [1]. »

Boltzmann déclare compter parmi ses meilleurs amis des énergéticiens dont il admire les travaux ; il ne combat ici que leurs publications spécifiquement énergétiques et ne voudrait donner à un débat aussi mathématique aucun tour personnel.

En mécanique, Boltzmann fait grief à Helm de s'être fixé une tâche qui semble sans espoir : déduire les équations du mouvement de la seule intégrale première de l'énergie. Même pour un unique point matériel possédant trois degrés de liberté, la chose est impossible, à moins d'hypothèses complémentaires : principe de superposition, identité du comportement de l'espace suivant toutes les directions, etc. Pour un système plus étendu, justiciable des équations de Lagrange, la même impossibilité apparaît *a fortiori*.

Ostwald s'est posé le même problème, mais s'est borné en l'espèce à de simples indications. Il n'a pas réussi à démontrer, à partir des seuls principes de l'énergétique, les conditions précises de l'équilibre mécanique.

Boltzmann se hasarde ici, au risque de se tromper, à tenter d'exprimer de façon condensée les idées mêmes d'Ostwald. Il semble que l'on pourrait construire la mécanique, d'une manière exempte de contradiction, à partir des principes suivants :

1. Les systèmes mécaniques se composent de points matériels ; leur énergie cinétique s'exprime, comme il est bien connu, par $\frac{1}{2}\sum mv^2$ et leur énergie potentielle (à distance) est une somme de fonctions des distances mutuelles de deux points.

2. Si, à un instant donné, tous les points sont au repos, ils se meuvent ensuite, pendant un temps infinitésimal, de telle façon que, conformément au principe de l'énergie, le maximum d'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique.

3. Si, dès l'instant initial, les points matériels sont en mouvement, il convient de superposer les vitesses qu'ils possèdent avec celles qu'ils acquerraient à tout instant en vertu de la règle 2 s'ils étaient au repos à cet instant dans la même situation relative.

[1] [9], pp. 104-105.

On obtient une autre formulation de la mécanique exempte de contradiction si, avec Planck, on admet que le principe de l'énergie est séparément valable, dans le mouvement d'un point matériel, pour chacune des trois directions des axes de coordonnées.

« Mais aucune de ces constructions ne remplit les promesses de l'énergétique. Car, tout d'abord, elles reposent sur l'hypothèse première que les corps sont constitués de points matériels, ce qui dans l'esprit de l'énergétique constitue une restriction gratuite à la liberté de notre pensée [1]. »

Critique particulièrement savoureuse, où Boltzmann s'amuse à se montrer plus exigeant que les énergétistes sur leurs principes mêmes.

« Je ne connais, poursuit Boltzmann, aucune démonstration directe des équations d'Euler pour le mouvement des corps solides, des équations de l'élasticité et de l'hydrodynamique à partir des seuls principes énergétiques, sans le biais de l'hypothèse atomiste. [Les constructions de l'énergétique] ne font en rien progresser notre connaissance des principes de la mécanique ; elles ne posent pas de théorèmes généraux qui seraient également valables en d'autres domaines, mais s'annexent les fondements de la mécanique en se bornant, sans grand succès, à les traduire partiellement dans le langage de l'énergétique. Le principe du maximum de transfert voit sa signification, que l'on voudrait universelle, réduite du fait qu'il ne s'applique qu'à de petits mouvements à partir du repos. Le fait d'ériger en loi générale de la nature le principe de superposition me semble prématuré... Enfin, quand plusieurs points matériels sont en jeu, la séparation des travaux que fournit chaque point du fait de son mouvement paraît arbitraire [2]. »

Aux exposés des énergéticiens qui admettaient encore l'existence de points matériels s'opposait la conception, alors toute récente, d'Ostwald dotant l'énergie d'une existence en soi, sans lui supposer nécessairement de support matériel. On peut l'admettre pour l'énergie calorifique considérée en elle-même. Mais on tombe aussitôt sur une difficulté si l'on considère, par exemple, le cas de l'énergie cinétique.

Que celle-ci soit une donnée première, qui ne saurait être autrement définie. Supposons-la disponible, à des degrés variables, aux différents points de l'espace. Les masses ne sont que de simples coefficients numériques, attribués aux différentes positions de l'espace pour décrire les variations de l'énergie cinétique. Rien n'empêche d'admettre que les valeurs de ces coefficients soient des fonctions déterminées du temps, ou encore qu'une valeur déterminée se propage d'un point à l'autre de

[1] [9], p. 110.
[2] *Ibid.*, pp. 110-111.

l'espace avec une vitesse donnée. Mais il est absolument exclu de définir à nouveau l'énergie cinétique à partir de ces coefficients et de ces vitesses ; cela serait une *contradictio in adjecto*, dès l'instant où l'énergie cinétique est une donnée première. (On voit ici la dialectique savante de Boltzmann, qui entre dans le jeu même d'Ostwald pour le mieux condamner.) Tout au contraire, il faudrait poser des lois pour les variations spatiales de l'énergie cinétique, retrouver à partir de celles-ci le concept de masse et se donner enfin, comme fait d'expérience ou loi naturelle, la vitesse correspondante sous la forme $\sqrt{\frac{2T}{m}}$.

En thermodynamique, l'énergétique s'est traduite par de nombreuses formes nouvelles, dont Boltzmann discute en détail la validité, et auxquelles nous ne pouvons nous arrêter ici.

Gibbs — dont on peut dire qu'il demeurait dans le cadre des descriptions et des conceptions habituelles de la physique théorique et que, pour cette raison, Boltzmann se refusait à classer au nombre des énergétistes — avait établi, à partir des deux principes de la thermodynamique, que la variation dE de l'énergie d'un corps lors du passage d'un état stationnaire à un état infiniment voisin se présente sous la forme

$$dE = TdS + \Sigma JdM$$

où T et S désignent la température absolue et l'entropie ; où les M sont les paramètres qui, avec l'entropie, spécifient l'état stationnaire et où les J ont une signification universelle, dès l'instant où il existe pour les systèmes de corps des relations simples entre les M.

Les énergétistes élèvent à l'état de loi naturelle le fait que dE se laisse décomposer en somme de produits de deux facteurs, oubliant ainsi la leçon précise de Gibbs et la généralisant arbitrairement. Cela conduit, par exemple, Helm à affirmer que dans un processus cyclique l'entropie d'un corps puisse augmenter.

D'autre part, c'est un fait que lors des transformations quasi réversibles on peut encore assigner à chaque élément de volume une température, une pression, etc., en sorte qu'il est possible d'appliquer les théorèmes de l'énergétique à chacun des éléments de volume au lieu des corps tout entiers. Mais que cela soit encore possible pour les processus turbulents est une hypothèse que rien ne justifie jusqu'ici. De nombreuses circonstances montrent que la séparation des formes d'énergie qualitativement différentes n'a de sens que pour des états quasi stationnaires. Dans ces conditions la description de la propagation de la chaleur, de la diffusion, de la production de chaleur par frottement interne, en mouvement turbulent, des processus d'explosion, etc., serait impossible

à l'aide des formules de l'énergétique actuelle. Celle-ci serait un cas limite dont s'approcheraient asymptotiquement les lois des mouvements quasi stationnaires.

Ostwald identifie encore le second principe avec la proposition selon laquelle quand deux intensités sont égales à une même troisième, elles sont égales entre elles. Cette proposition est bien un corollaire du second principe pour la température de trois corps directement en liaison entre eux. Mais elle est beaucoup plus restrictive que le second principe, selon lequel en outre, dans tout processus cyclique avec de nouveaux corps où interviennent d'autres énergies, aucune chaleur ne peut être transférée d'un corps à l'autre sans compensation.

Elargissant alors le débat, Boltzmann en vient à la conférence qu'Ostwald avait faite à Lübeck en 1895 sur le matérialisme scientifique. Dans cet exposé, Ostwald « procède par images et considérations générales sur lesquelles on devrait s'interdire ici de se prononcer car, si brillantes qu'elles soient, elles ne prouvent ni n'infirment rien. Mais l'illusion d'une logique rigoureuse exerce sur tant d'esprits une si extraordinaire force de conviction qu'il semble utile d'examiner de plus près certains traits au moins de cet exposé.

» Je pense, ajoute Boltzmann, que cela est d'autant plus nécessaire que déjà un grand nombre de jeunes gens se tournent vers les moissons faciles que leur promettent les différents domaines de l'énergétique, sans posséder la critique mathématique qui est indispensable pour œuvrer utilement en physique théorique [1]. »

Quand Ostwald stigmatise le fait que l'on pense encore aujourd'hui que les atomes et les forces constituent la réalité ultime et que l'on puisse tenir pour assurée la possibilité d'accéder à l'idéal du déterminisme universel selon Laplace, il s'élève ainsi, nous dit Boltzmann, contre une opinion que personne ne soutient plus :

« Il n'y a pour ainsi dire plus personne qui tienne la force pour une réalité, ni pour penser que l'on puisse jamais administrer la preuve que l'ensemble des phénomènes naturels soit susceptible d'une explication mécanique... J'ai moi-même, avoue Boltzmann, rompu autrefois des lances en faveur du mécanisme universel, mais cela uniquement dans l'idée d'en montrer l'immense supériorité sur les explications purement mystiques autrefois reçues. L'opinion selon laquelle le seul moyen d'expliquer la nature résiderait dans la considération de points matériels entre lesquels agissent des forces à distance était presque unanimement abandonnée bien avant les déclarations d'Ostwald.

» Nous sommes devenus aujourd'hui beaucoup plus prudents : cette

[1] [9], p. 129.

représentation est pour nous une simple image, que nous n'adorons pas, qui peut-être est susceptible d'être perfectionnée, mais à laquelle il faudra peut-être entièrement renoncer. Cette image est encore aujourd'hui pour nous du plus grand intérêt, comme étant la seule que nous possédions qui puisse être développée sur bien des points importants en accord avec l'expérience [1]. »

L'unanimité est faite pour donner le pas à des descriptions aussi dégagées que possible d'hypothèses arbitraires. Cette tendance se trouve chez Maxwell (*On Faraday's lines of force*, 1856, [3]), qui jugeait déjà les différentes hypothèses de l'optique comme Ostwald le fait aujourd'hui, chez Hertz dans la préface de son livre *Über die Ausbreitung der elektrischen Kraft* (1892), [2], chez Lord Salisbury, [1] (*British Association*, Oxford, 1894) et même en théorie cinétique des gaz, où les molécules ne sont plus considérées comme des agrégats de points matériels, mais comme des systèmes non spécifiés, définis par des coordonnées généralisées.

« Nous sommes donc d'accord sur la nécessité d'élargir le champ de chacun des points de vue. Mais aucun des arguments, à l'aide desquels Ostwald cherche à démontrer que les représentations de la physique théorique traditionnelle sont insoutenables et que l'on doive dorénavant leur préférer celles de l'énergétique, ne m'apparaît fondé [2]. »

Certes les méthodes habituelles de la physique théorique comportent des lacunes et sont encore bien loin d'offrir une description parfaitement claire et cohérente de tous les phénomènes. Mais les lacunes et les obscurités de l'énergétique apparaissent encore plus grandes. « On devrait s'interdire toute image de la réalité. Mais les pensées humaines sont-elles autre chose que de telles images ? Il n'y a que la divinité dont on ne doit et ne peut se faire aucune image [3]. »

Passons ici sur les considérations philosophiques développées par Boltzmann à l'égard des thèses de l'énergétique pour en venir à la discussion de l'objection de réversibilité reprise par Ostwald à l'encontre de l'interprétation mécaniste du second principe :

« Ostwald conclut de la complète réversibilité des équations différentielles de la mécanique par rapport au temps que le mécanisme universel *(mechanische Weltauffassung)* ne saurait expliquer pourquoi les processus de la nature se déroulent toujours dans un sens privilégié. Il me semble qu'il néglige ainsi le fait que les processus mécaniques sont définis non seulement par des équations différentielles, mais aussi par des conditions initiales. En opposition directe à la thèse d'Ostwald, j'ai montré que l'une des plus éclatantes confirmations du mécanisme était précisé-

[1] [9], pp. 129-130.
[2] *Ibid.*, p. 130.
[3] *Ibid.* Cela est littéralement newtonien.

ment d'offrir une image excellente de la dissipation de l'énergie, si l'on admet que le monde est parti d'un état initial répondant à des conditions données, que j'ai qualifié d'état non probable (*Gastheorie*, I, §§ 3 et 19). Je me bornerai ici à donner une idée de la chose sur un exemple très simple : dans un tambour de loterie d'où l'on extrait des billes et où on les mélange, soient des billes de deux sortes (blanches et noires) initialement ordonnées, par exemple les blanches en haut, les noires en bas. Faisons tourner le tambour assez longtemps, à l'aide d'une machine quelconque ; personne ne doutera qu'il s'agit là d'un processus purement mécanique et cependant les billes se mélangeront de plus en plus, c'est-à-dire que se manifestera constamment une tendance modifiant la répartition dans un sens déterminé (vers un mélange parfait). Il en sera de même de l'Univers, si celui-ci est parti d'un état dans lequel l'ordonnance des atomes et de leurs vitesses présentait certaines régularités : les forces mécaniques provoqueront de préférence des modifications tendant à détruire ces régularités. Peu importe la façon dont ces régularités ont pu naître, de même que la façon dont les atomes et leurs lois de mouvement ont pu naître [1]. »

L'explication mécanique de la nature, à supposer qu'elle soit possible, pose à l'esprit humain un problème des plus difficiles. Les échecs en ce domaine n'ont donc rien de surprenant. Les hypothèses aujourd'hui abandonnées, comme la théorie de l'émission ou celle des fluides électrique et magnétique ont encore leur utilité pour l'illustration de certaines lois. Aucune hypothèse mécanique n'a été exploitée jusqu'au bout. Il reste encore trace dans la science des hypothèses les plus anciennes ; aucune théorie ne chasse entièrement celles qui la précédaient : la théorie des ondulations devra sans doute être modifiée, mais elle n'a pas été simplement supplantée par la théorie électromagnétique. Il est fort possible que les polarisations diélectriques rapidement changeantes qui, selon cette dernière théorie, forment la nature de la lumière soient, à la faveur d'une nouvelle mécanique, ramenées un jour à des oscillations de particules.

En conclusion, Boltzmann répète qu'il convient de tendre, à l'exemple de Kirchhoff, Clausius, Helmholtz et Gibbs, vers une description de la nature aussi dégagée que possible d'hypothèses. Le mode d'expression de l'énergétique s'y est montré jusqu'ici peu approprié, et la pédagogie même de l'énergétique peut avoir des effets néfastes. A côté de la physique théorique générale, les modèles de la physique mécaniste conservent encore une utilité extrême et sont encore à cultiver aussi bien comme moyen d'investigation que pour classer les idées, en donner une

[1] [9], pp. 133-134.

représentation claire et les conserver dans la mémoire. Les tenants de la physique actuelle sont aussi éloignés que tout autre de croire à la permanence et à la perfection des formes traditionnelles de pensée et ne sauraient condamner par avance les tentatives nouvelles. Mais les novateurs eux-mêmes, avant d'avoir remporté de véritables succès ne sont pas fondés à aller jusqu'à qualifier d'absurdes des modes de pensée qui ont fait leurs preuves. Et bien que les formes d'expression de la physique théorique générale soient aujourd'hui les plus adéquates et les plus pratiques, les images traditionnelles du mécanisme ne sont pas devenues superflues pour autant. Il serait tout à fait gratuit de s'interroger dès aujourd'hui sur les formes de pensée qui, dans le grand avenir, devront se révéler les plus adéquates. A cet égard il est fort possible que le développement de l'énergétique se montre d'une grande utilité pour la science. Mais ses protagonistes, qui se présentent à tort comme des continuateurs de Gibbs, n'en prennent pas le chemin.

A la suite du mémoire que nous venons d'analyser, Helm avait aussitôt répondu à Boltzmann [1].

Revenant brièvement sur le sujet dans *Zur Energetik* [10], Boltzmann déclare qu'on ne doit pas attendre d'une discussion analogue à celle qui se poursuit à propos de l'énergétique que l'un des partis puisse avoir tort et l'autre raison, et qu'on peut seulement espérer clarifier les points de vue en présence.

Planck et Helm ont simultanément montré que les équations habituelles du mouvement d'un système de points peuvent être obtenues à partir du principe de l'énergie, à la condition que ce principe soit valable séparément pour chaque direction des axes de coordonnées, ou d'après Helm pour toute direction arbitrairement choisie. Helm obtient ainsi les équations de Lagrange et toute la mécanique, en supposant que les éléments d'un système sont des points matériels.

« *Mais cette supposition nous ramène de toute évidence sur le terrain de l'ancienne atomistique.* On déduit de celle-ci, comme il est bien connu, qu'au cours d'un mouvement prolongé sous l'influence de forces qui n'agissent pas également sur chaque point, des mouvements irréguliers doivent prendre naissance, lesquels absorbent toujours une partie de l'énergie cinétique visible, et que, lorsque le mouvement des points est suffisamment intense, ceux-ci frottent les uns sur les autres, ce qui fluidifie le corps, dont des particules se détachent à la surface, ce qui entraîne une vaporisation.

» Ces hypothèses atomistes reconnaissent ainsi le concept d'énergie comme un des plus importants ; elles se laissent même, si l'on veut,

[1] *Wiedemann Annalen*, vol. 57, 1896, p. 646, [1].

déduire de ce concept moyennant des hypothèses auxiliaires convenables. Mais comme l'énergétique se refuse à admettre, comme insuffisamment garanties, de telles hypothèses, il lui faut suivre une voie toute différente.

» Je n'ai pu encore jusqu'ici, déclare Boltzmann, me représenter comment une mécanique peut être construite à partir de l'hypothèse que l'énergie cinétique du mouvement est une donnée première, tandis que l'objet même du mouvement *(das Bewegliche)* ne serait qu'un concept dérivé [1]. »

Mais si l'énergétique se résigne à faire abstraction du concept de masse, elle doit admettre, pour échapper aux hypothèses atomistes, que la matière remplit complètement l'espace. Il faudrait alors, à partir du principe de l'énergie et moyennant des hypothèses auxiliaires convenables, former les équations du mouvement des corps solides, peut-être en obtenant les équations de Lagrange, sans le détour des coordonnées des points individuels qui composent le corps ni des forces qui agissent sur ces points. Avec de nouvelles hypothèses auxiliaires, il faudrait encore obtenir les équations relatives à l'énergie élastique et hydrodynamique. Toutes ces déductions doivent être possibles à la faveur de telle ou telle hypothèse et leur étude paraît devoir être utile à la science.

Il serait plus difficile encore, à partir du point de vue purement énergétique, de donner un aperçu de tous les cas où de l'énergie mécanique peut se transformer en chaleur, des phénomènes de fusion et de vaporisation, des propriétés des gaz et des vapeurs, tandis que ces phénomènes s'expliquent aisément par la théorie moléculaire et la thermodynamique restreinte.

L'énergétique semble encore loin d'avoir rempli ce programme. Il faudrait évidemment qu'elle y soit parvenue pour que l'on puisse porter un jugement sur la valeur des hypothèses auxiliaires que suppose l'énergétique et comparer celles-ci avec la théorie moléculaire dans le domaine entier de la mécanique.

Il ne serait possible de préciser ce que l'énergétique apporte réellement de neuf aux théories de Gibbs que si l'on avait au moins jeté les bases, du seul point de vue de l'énergétique, d'un exposé de la thermodynamique, de la chimie et de l'électricité.

De son côté, Ostwald avait fait connaître à Boltzmann qu'il ne tenait pas, comme celui-ci avait pu le penser, l'énergie cinétique pour une donnée première dans le champ de la mécanique et qu'il entendait, à la manière classique, partir de la masse pour définir cette énergie par $\frac{1}{2} mv^2$.

[1] [10], pp. 137-138.

Boltzmann déclare n'avoir jamais douté qu'Ostwald fût convaincu de la supériorité de sa propre thèse et refusât de s'en laisser détourner. Il ne semble pas que les chimistes puissent s'associer à la condamnation de l'atomisme. Boltzmann fait encore observer que Gibbs a certainement eu recours à des représentations moléculaires pour fonder ses théorèmes, même s'il n'a jamais introduit de molécules dans ses calculs. Il en va de même pour la théorie électrochimique de Nernst, fondée à l'origine sur des considérations purement moléculaires. Ce n'est qu'après coup que ces théorèmes ont été séparés de leur base moléculaire et présentés comme de purs faits d'expérience. La partie mathématique de la théorie cinétique poursuit essentiellement, sans souci d'application pratique immédiate, le but de développer une méthode abstraite. « Le praticien peut ne pas lire cette théorie, mais il n'est pas fondé à la critiquer [1]. »

[1] [10], p. 140.

Nécessité de l'atomistique

Au-delà de sa critique de l'énergétique, Boltzmann devait s'employer, dans un important mémoire *Über die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft* (1897), [11], à justifier la nécessité de l'atomistique. Dans ce débat, Boltzmann est amené à discuter les interdits que l'école dirigeante de l'époque avait, sur l'autel de la phénoménologie (dont l'énergétique n'était qu'un aspect particulier), prononcé à l'égard de toutes les théories physiques fondées sur des modèles analogues à ceux du mécanisme traditionnel. Pour sa part, Boltzmann ne formule aucune exclusive à l'égard des théories aussi libérées que possible d'hypothèses — comme la thermodynamique générale — mais, dans son finitisme mathématique, il soutient que les équations différentielles de la physique se réfèrent en fait à des collections d'individus élémentaires en nombre fini, et cela le ramène à l'atomistique.

Précisons que par atomistique, au sens large, Boltzmann entendait l'ensemble des modes d'expression de la physique théorique traditionnelle, tandis que le point de vue phénoménologique se réfère, en physique mathématique, à la représentation pure et simple, à l'aide d'équations différentielles, d'un domaine nettement délimité de faits d'expérience.

« Il semble, déclare Boltzmann, qu'actuellement l'atomistique doive être abandonnée pour des raisons à peine plausibles et je pense qu'il est de mon devoir de prévenir le danger qu'à mon sentiment courrait la science si la phénoménologie, comme autrefois l'atomistique, devait être élevée à l'état de dogme [1]. »

Ecartant ici les considérations générales d'ordre philosophique, Boltzmann entend se limiter à étudier des questions très précises, qui sont les suivantes : « L'atomistique sous sa forme actuelle n'offre-t-elle pas encore de grands avantages sur la phénoménologie telle qu'on la

[1] [11], p. 141.

pratique ? Y a-t-il quelque probabilité pour que, dans un délai concevable, la phénoménologie conduise à une théorie offrant les avantages habituels de l'atomistique ? Est-il possible que l'atomistique doive être abandonnée ou, qu'au contraire, la phénoménologie de plus en plus s'y réduise [1] ? » Et Boltzmann se propose de répondre à toutes ces questions au bénéfice de l'atomistique, pour les raisons que nous allons voir.

Les équations différentielles de la phénoménologie physico-mathématique ne se réduisent évidemment pas à de simples règles pour la formation et la combinaison de concepts géométriques et de nombres : elles sont encore, nécessairement, des images mentales, des constructions de l'esprit *(Gedankenbilder)* qui permettent de formuler des prévisions. (Et à cet égard Boltzmann invoque l'autorité de Mach, dont les écrits ont contribué à la clarification de sa propre *Weltanschauung*.) A ce point de vue, on ne saurait apercevoir la moindre différence entre l'atomistique et la phénoménologie, car il est impossible de donner jamais une description directe d'un ensemble quelque peu étendu de faits d'expérience : seul un *Gedankenbild* est possible. « On ne doit donc pas dire, avec Ostwald : Tu ne dois te faire aucune image, mais seulement : Tu admettras dans celle-ci aussi peu que possible d'arbitraire [2]. »

C'est avec l'intention de péjorer l'atomistique que la phénoménologie met au premier rang la considération des équations différentielles. Soutenir que celles-ci, contrairement aux modèles de l'atomistique, ne vont pas au-delà de l'expérience repose sur l'idée que nos perceptions sont fondées sur l'image du continu. Boltzmann conteste la chose, en prenant comme exemple l'équation classique de Fourier sur la transmission de la chaleur. Celle-ci repose en effet sur les règles suivantes :

1. On imagine à l'intérieur d'un corps (ou dans un domaine fini d'une multiplicité à trois dimensions) un grand nombre de petits objets (appelons-les des corpuscules élémentaires ou mieux des éléments ou des atomes au sens large du terme) dont chacun possède initialement une température arbitraire. Au bout d'une durée très petite (après un accroissement très petit d'une quatrième variable), la température de chaque élément est la moyenne arithmétique des températures que possédaient auparavant les corpuscules de son voisinage immédiat. On répète le même processus au bout d'une seconde durée égale à la première, etc.

2. On imagine encore que les corpuscules élémentaires, ainsi que les intervalles de temps considérés deviennent de plus en plus petits, que

[1] [11], p. 142.
[2] *Ibid.*

leur nombre augmente à proportion et devienne de plus en plus grand, et on s'arrête lorsque les valeurs de la température ne sont plus influencées de façon notable par une nouvelle diminution.

« Il ne faut pas croire qu'en parlant de *continuum* ou en écrivant une équation différentielle on se donne par là même une conception précise du continu. Un examen plus approfondi montre qu'une équation différentielle exprime seulement que l'on doit tout d'abord imaginer un nombre fini [d'éléments] ; ensuite que ce nombre doit croître jusqu'à ce qu'une augmentation ultérieure n'ait plus d'influence... Je m'excuse, déclare Boltzmann, de dire banalement que les arbres cachent la forêt à ceux qui estiment s'être dégagés de l'atomistique par la considération des équations différentielles. Une explication de l'équation de la chaleur au moyen de concepts compliqués, géométriques ou physiques, donnerait bien plus à celle-ci l'apparence d'une analogie qu'une description directe (comme celle donnée plus haut). Nous ne sommes pas capables de séparer en réalité les parties voisines ; mais une image dans laquelle, dès l'origine, les parties voisines ne seraient pas distinguées serait trop vague ; et nous ne pourrions, de ce fait, entreprendre les opérations de calcul prescrites [1]. »

Si donc on considère une équation différentielle, ou une formule contenant une intégrale définie, comme l'image la plus adéquate, on s'abandonne à l'illusion de penser s'être affranchi de la représentation atomiste, sans laquelle le concept de limite est vide de sens. Plus encore, on affirme ainsi que, quel que soit l'affinement ultérieur des moyens expérimentaux, aucune différence entre les faits d'expérience et les valeurs limites ne sera jamais observable.

Ce que Boltzmann, dans son finitisme mathématique, reproche à la phénoménologie, c'est d'avoir oublié la racine physique des équations différentielles et partant de tendre à codifier la science. Les lignes qui suivent, où ce finitisme s'exprime de la façon la plus radicale, ont un accent prophétique.

« Tandis qu'auparavant l'hypothèse d'une grandeur déterminée des atomes passait pour une représentation grossière, allant arbitrairement au-delà de l'expérience, elle nous apparaît maintenant comme la plus naturelle, et l'affirmation qu'aucune différence ne pourra jamais être décelée entre les faits d'expérience et les valeurs limites, sous prétexte que jusqu'ici on n'a pu y parvenir, viendrait ajouter à la théorie un élément nouveau entièrement gratuit. Je n'arrive pas à concevoir comment le fait de poser après coup une semblable condition rendrait notre image plus claire, plus simple ou plus vraisemblable. L'atomistique

[1] [11], p. 144.

paraît inséparable du concept même de continu » *(Die Atomistik scheint vom Begriffe des Kontinuums untrennbar* [1]*)*.

Et Boltzmann en appelle au processus historique pour étayer sa thèse : il considère comme évident que Laplace, Poisson et Cauchy sont partis de considérations atomistes ; on était encore, en ce temps-là, clairement conscient du fait que les équations différentielles ne sont que des symboles substitués aux représentations atomistes, dans l'impérieuse nécessité où l'on se trouvait alors de formuler plus simplement celles-ci. Depuis, la symbolique des équations différentielles nous est devenue si familière que nous avons tendance à en oublier l'origine.

On ne doit honnêtement attribuer à l'affirmation de Hertz, selon laquelle la théorie électromagnétique se réduit à un certain système d'équations différentielles, que le sens suivant : on se représente les phénomènes correspondants par l'image de deux êtres de raison remplissant complètement l'espace, possédant tous deux le caractère vectoriel et dont la variation avec le temps ne dépend (comme dans l'équation de la chaleur) que du voisinage immédiat, mais cela d'une façon compliquée, bien que facile à expliciter. On obtient ainsi une théorie « atomiste » de l'électromagnétisme, qui renferme le minimum d'arbitraire. On n'a pas réussi à interpréter mécaniquement cette théorie, dans l'impossibilité d'en suivre la complexité, et aussi en raison de l'incompatibilité entre ce modèle électromagnétique et les modèles utilisés pour traduire d'autres faits d'expérience. On exprime cette incompatibilité, ainsi que la probabilité de l'existence de modèles plus simples, en avouant (avec Mach) que l'on ignore ce que c'est que l'électricité. De cette manière la phénoménologie « en revient purement et simplement au point de vue de Lémery, qui ne craignait nullement de doter les atomes des propriétés les plus compliquées, à la condition d'obtenir ainsi une explication des faits d'expérience ; à cela près que nous ne nous en rendons pas compte, parce que nous nous cachons la tête dans les équations différentielles, à la manière de l'autruche [2] ».

De même que l'équation de la chaleur, les équations fondamentales de l'élasticité ne peuvent être obtenues d'une façon générale qu'en supposant d'abord un nombre fini de corpuscules élémentaires agissant les uns sur les autres suivant certaines lois simples, et en passant ensuite à la limite par augmentation de ce nombre. Cette limite est de nouveau

[1] [11], pp. 144-145. Boltzmann note ici que les perceptions visuelles correspondent à l'excitation d'un nombre fini de filets nerveux, et seront probablement mieux représentées par une mosaïque que par une surface continue. Il en va de même des autres sensations. N'est-il donc pas probable que les modèles traduisant des complexes de perceptions ne seraient pas mieux composés de parties discrètes ?

[2] [11], p. 146, note.

la définition propre des équations fondamentales, et l'image initiale comportant un nombre très grand, mais fini, de corpuscules apparaît ici encore comme la plus simple.

On peut ainsi, en ne dotant les éléments correspondants que des seules propriétés qui sont nécessaires pour décrire de la façon la plus simple un groupe limité de faits d'expérience, obtenir dans chaque cas une « atomistique » particulière, laquelle ne constitue pas une description directe, mais offre une image aussi peu arbitraire que possible.

« La phénoménologie essaye de combiner entre elles toutes ces atomistiques particulières, sans simplification préalable, dans le but de traduire la réalité ; c'est-à-dire qu'elle essaye de s'accommoder de toutes les représentations contenues dans ces atomistiques. Elle s'accompagne ainsi d'une quantité de concepts empruntés chacun à un groupe de phénomènes et peu conciliables entre eux, ainsi que d'une quantité d'équations différentielles dont chacune, en dépit de multiples analogies, possède encore de nombreuses particularités. On doit donc s'attendre à un exposé d'une structure très compliquée. Il se révèle en fait que des équations tout à fait obscures et compliquées sont nécessaires, même lorsque la phénoménologie se borne à la réunion d'un petit nombre de domaines expérimentaux et à des processus quasi stationnaires (par exemple, déformation élastique avec échauffement et aimantation). On doit encore (pour exposer la dissociation des gaz d'après Gibbs ou celle des électrolytes d'après Planck) introduire de nouveaux éléments hypothétiques, c'est-à-dire aller encore au-delà des faits.

» Il s'ajoute encore cette circonstance que tous les concepts de la phénoménologie sont empruntés à des apparences quasi stationnaires et ne sont plus utilisables en cas de mouvement turbulent. C'est ainsi que l'on peut définir la température d'un corps au repos avec un thermomètre. Si le corps subit un déplacement d'ensemble, le thermomètre peut l'accompagner. Mais si chaque élément de volume du corps possède un mouvement particulier, la définition devient sans objet et il est vraisemblable, ou tout au moins possible, que les différentes formes d'énergie (chaleur, énergie cinétique visible, etc.) ne se laissent plus nettement séparer.

» Si l'on réfléchit à cela, ainsi qu'à la complexité que présentent déjà les équations phénoménologiques dans le petit nombre de cas où on représente l'interpénétration de plusieurs domaines expérimentaux, on aura une idée des difficultés à décrire avec une telle méthode des phénomènes arbitrairement turbulents, et liés à des transformations chimiques, sans avoir au préalable, par des simplifications à vrai dire arbitraires, amené en meilleure concordance les atomistiques particulières correspondant aux différents domaines expérimentaux. En regard des

propriétés qu'il serait nécessaire à cet effet d'attribuer aux corpuscules élémentaires, les molécules de Lémery seraient de véritables modèles de simplicité [1]. »

Ayant ainsi dénié à la phénoménologie toute possibilité pratique de synthèse, Boltzmann en revient à la critique de l'énergétique :

« Une phénoménologie particulière, que je qualifierai d'énergétiste (au sens le plus large) nourrit l'espoir, en développant les aspects communs à l'ensemble de tous les groupes de phénomènes, de rapprocher les unes des autres les différentes atomistiques correspondant à chacun de ces groupes. On connaît deux sortes de telles voies générales. A la première appartiennent certains théorèmes généraux, comme le principe de l'énergie et celui de l'entropie, je dirais des intégrales générales valant pour tous les phénomènes. La seconde consiste en analogies que l'on peut établir entre les groupes de phénomènes les plus différents. Ces dernières ne se fondent souvent que sur des similitudes formelles que certaines équations doivent toujours présenter à un certain degré d'approximation, tandis que dans les détails plus fins elles semblent fréquemment disparaître (proportionnalité approchée entre de petites modifications des fonctions et celles de leur argument, approximation de dérivées premières ou secondes par des coefficients quasi constants, linéarité de petites grandeurs et par suite superposition ; de même les analogies dans le comportement des différentes formes d'énergie semblent avoir en partie de telles bases algébriques). Mais en dépit de la très grande importance des intégrales générales (en raison de leur validité universelle et de la sécurité corrélative qui s'y attache) et des analogies (à cause des nombreux avantages de calcul et des nouveaux points de vue qu'elles offrent), les unes et les autres ne donnent qu'une faible partie de la liaison globale entre les faits ; on doit donc, pour représenter de façon précise chaque groupe de phénomènes, introduire tant d'images particulières (sorte d'histoire naturelle du groupe correspondant) que, comme je crois l'avoir montré ailleurs, on n'a pas encore réussi une seule fois, par cette méthode, à donner une description univoque et complète des apparences stationnaires d'un seul domaine expérimental, sans parler d'un aperçu de tous les domaines, ni des phénomènes turbulents. La question de savoir si un jour on obtiendra par cette voie des images étendues de la nature n'a donc jusqu'ici qu'une valeur purement académique [2]. »

Dans l'esprit de Boltzmann, c'est à une atomistique nouvelle *(heutige Atomistik)* qu'il appartient de dégager une synthèse entre ce qu'il va

[1] [11], pp. 147-148.
[2] *Ibid.*, pp. 148-149.

jusqu'à appeler « les différentes atomistiques phénoménologiques », c'est-à-dire les différentes théories individuelles que la phénoménologie ne parvient qu'à juxtaposer [1].

En vue de cette synthèse, l'atomistique doit décomposer les propriétés des éléments nécessaires à la traduction d'un domaine isolé de faits d'expérience en des composantes telles qu'elles s'appliquent à plusieurs domaines. Cela n'est évidemment possible qu'à la faveur d'un certain arbitraire allant au-delà des faits [2]. Mais on obtient ainsi l'avantage de faire correspondre à un grand nombre de faits une image claire et simple.

Et voici le plaidoyer en faveur de l'atomistique :

« Tandis que la phénoménologie utilise déjà des images distinctes, peu conciliables entre elles, pour la mécanique des points matériels et des corps solides, pour l'élasticité, l'hydrodynamique, etc., l'atomistique actuelle constitue un modèle parfaitement adéquat de tous les phénomènes mécaniques, et on peut à peine s'attendre que l'achèvement de ce domaine amène à découvrir de nouveaux phénomènes qui y échappent. Ce modèle s'étend encore aux phénomènes calorifiques. Le fait que cette dernière circonstance ne puisse être établie avec autant de certitude tient uniquement à la difficulté de calculer le mouvement moléculaire. En tout cas, tous les faits d'expérience essentiels se retrouvent dans les traits de ce modèle. Celui-ci se révèle encore extrêmement utile dans la description des faits de la cristallographie, des rapports constants des masses dans les combinaisons chimiques, des isomères, des rapports entre la polarisation et la constitution chimique, etc.

» En outre, l'atomistique est encore susceptible de grands développements. On peut imaginer parmi les atomes des individus complexes, doués de propriétés arbitrairement choisies, comme les atomes vectoriels qui, nous l'avons vu, offrent pour l'instant la description la plus simple des phénomènes électromagnétiques. Si on entend par explication mécanique de la Nature celle qui repose sur les lois de la mécanique d'aujourd'hui, il est tout à fait incertain que l'atomistique de l'avenir doive revêtir ce caractère. C'est seulement dans la mesure où elle donnera des lois aussi simples que possible pour la variation avec le temps d'un

[1] Au sens de Boltzmann, la phénoménologie aurait tous les torts, car le plus souvent ses équations différentielles ne sont que des héritages atomistes, qu'elle méconnaît.

[2] A ce propos, Boltzmann note que l'immutabilité des atomes est un des traits arbitrairement donnés à leur image. On ne doit plus chercher, comme autrefois, à en faire une vérité *a priori*. Cette immutabilité appartient à ces propriétés qui se sont montrées utiles, bien que les considérations métaphysiques par lesquelles on y est parvenu ne résistent pas à la critique. C'est précisément en raison de cette utilité que l'on doit accorder une certaine probabilité à ce que l'énergie rayonnante se laisse représenter par des images semblables à celles de la matière.

grand nombre d'objets individuels répartis dans une multiplicité à trois dimensions que l'on pourra la qualifier de mécanique au sens figuré [1]. »

Boltzmann souligne encore que l'atomistique actuelle peut traiter de tous les phénomènes mécaniques ou thermiques dans les gaz, même en présence de mouvements turbulents, et offre ainsi un point de départ pour définir en pareil cas la température, la pression, etc.

Toutes les propositions de la thermodynamique restreinte (c'est-à-dire de la thermodynamique fondée sur les représentations de la théorie cinétique) sont vérifiées par l'expérience dans les domaines les plus disparates auxquelles elles se réfèrent, ce qui fait dire à Boltzmann « qu'elles s'accordent, dans leurs nuances les plus ténues, aux pulsations mêmes de la Nature ».

Cela serait un idéal que de réussir à construire une théorie aussi vaste que l'atomistique actuelle et de pouvoir la fonder sur des bases aussi claires et aussi irréfutables que la théorie de Fourier. Rien ne permet d'affirmer que cela soit possible par unification des équations phénoménologiques jusqu'ici disjointes, ou au contraire par une adaptation de l'atomistique actuelle. Peut-être de nouvelles expériences, comme l'observation directe des mouvements moléculaires dans les liquides, seront-elles décisives à cet égard.

« Il me paraît, déclare Boltzmann, tout à fait injustifié de penser que des modèles comme la thermodynamique restreinte ou la théorie atomique de la chimie et de la cristallisation doivent être écartés de la science. On peut seulement se demander quel est le plus grand inconvénient pour la science, soit de cultiver de tels modèles avec une hâte excessive, soit de les écarter avec une prudence excessive...

» Même si la possibilité existe de réunir les images de la phénoménologie en une théorie qui les embrasse, par une autre voie que celle de l'atomistique actuelle, il n'en est pas moins certain que :

» 1° Cette théorie ne peut être un simple inventaire en ce sens que chaque fait d'expérience y serait étiqueté d'un signe particulier ; il serait en effet aussi long de s'orienter dans cette voie que de vivre tous ces faits. Cette théorie ne peut, comme l'atomistique actuelle, que s'astreindre à construire un *Weltbild*.

» 2° Si l'on ne s'abandonne à aucune illusion sur la signification d'une équation différentielle, ou en général d'une grandeur étendue de façon continue, on ne peut mettre en doute que ce *Weltbild* doive être dans son essence une théorie atomiste, c'est-à-dire qu'il prescrive d'imaginer les changements avec le temps, selon des règles déterminées, d'un

[1] [11], pp. 150-151.

nombre extrêmement grand d'objets situés dans une multiplicité à trois dimensions. Ces objets peuvent être soit de même nature, soit de nature différente, invariables ou au contraire variables. Ce modèle pourrait représenter correctement tous les phénomènes en supposant un nombre fini d'objets, ou en passant à la limite en faisant croître (indéfiniment) ce nombre de façon continue.

» Si l'on imagine qu'il soit possible de construire un *Weltbild* dans lequel chaque voie ait l'évidence de la théorie de la chaleur de Fourier, on ignore encore si ce but pourra être atteint plus facilement par la méthode phénoménologique ou par extension et confirmation expérimentale des modèles de l'actuelle atomistique. On pourrait tout aussi bien penser qu'il peut y avoir plusieurs *Weltbilder* possédant tous la même propriété idéale [1]. »

Boltzmann revient sur le même thème, dans un second mémoire *Nochmals über die Atomistik* [12] où il précise et affirme à nouveau son interprétation finitiste des équations différentielles de la physique. Ayant déjà eu l'occasion de citer plus haut les passages essentiels de ce mémoire [2], nous n'y insisterons pas davantage. Disons seulement que Boltzmann n'y laisse guère de chances à une phénoménologie mathématique qui puisse être indépendante de l'atomistique au sens large.

[1] [11], pp. 155-156.
[2] Voir plus haut § 1, pp. 26-28.

CHAPITRE IX

Retour aux méthodes de la physique théorique

Après avoir combattu l'énergétique comme nous venons de le voir, Boltzmann revient, dans un exposé fait à Munich en 1899, à la discussion des méthodes de la physique théorique.

Il témoigne tout d'abord de l'isolement où il était placé :

« Je puis dire, en vérité, que je suis demeuré le seul parmi ceux qui embrassaient en toute ferveur les théories anciennes ; du moins suis-je le seul à combattre encore en leur faveur, dans la mesure de mes moyens. Je considère comme la tâche de ma vie de contribuer, dans toute la mesure de mes forces, à une extension aussi claire et aussi logique que possible des résultats de la théorie classique. Je suis convaincu du fait que celle-ci recèle encore de nombreuses richesses utilisables pour l'avenir, et de la nécessité d'éviter d'avoir à les redécouvrir, comme cela s'est déjà produit dans le domaine de la science.

« Je me présente par suite comme un réactionnaire, un retardataire qui exalte le passé devant les nouveautés ; mais je ne pense pas être aveugle devant les avantages du neuf... Et je sais, comme tout le monde, que les choses m'apparaissent subjectivement colorées par mes propres lunettes[1]. »

Après avoir rappelé les critiques de Kirchhoff et de Hertz à l'égard de la structure dualistique de la mécanique classique, Boltzmann conclut au caractère nécessairement nominal de toute théorie :

« [La mécanique de Hertz] apporte clairement à la conscience des physiciens un fait que les philosophes ont depuis longtemps exprimé : aucune théorie n'est quelque chose d'objectif, qui puisse couvrir la nature ; la théorie n'est qu'une image des phénomènes et qui leur correspond comme un signe à la chose signifiée[2]. »

Boltzmann reprend alors, en termes généraux, la critique de l'énergétique :

[1] [14], p. 205.
[2] *Ibid.*, p. 215.

« Le concept d'énergie est, pour la nouvelle école, le seul point de départ de la *Naturforschung*. La décomposition de l'énergie en deux facteurs, jointe à un principe de variation, est la loi fondamentale de la nature. Toute image mécanique qui tendrait à expliquer pourquoi l'énergie prend directement les formes les plus curieuses et suit dans chacune d'elles des lois analogues et cependant au fond distinctes est considérée comme superflue, pour ne pas dire nuisible. La physique, et même toute la philosophie naturelle de l'avenir se réduit, pour les énergétistes, à la seule description du comportement de l'énergie sous toutes ses formes, à une histoire naturelle de l'énergie, ce qui est un pléonasme si par énergie on entend toute réalité.

» Certes, les analogies du comportement des différentes formes de l'énergie sont si importantes et si intéressantes que leurs processus variés constituent une des plus belles études que l'on doive demander à la physique ; l'importance du concept d'énergie justifie que l'on essaye de le choisir comme point de départ. On doit encore reconnaître que la voie de recherche constituée par la physique classique a conduit ici et là à des excroissances appelant une utile réaction. Chacun pouvait se sentir appelé à imaginer une construction d'atomes, de tourbillons et de liaison entre eux [1]. »

Boltzmann affirme, au contraire des énergétistes, l'intérêt essentiel d'aborder un même problème par des voies différentes. Il offre à ce titre un pacte à ses contradicteurs, sans d'ailleurs rien céder sur le fond :

« Je sais combien il est nécessaire d'attaquer les problèmes par des voies différentes et mon cœur bat chaleureusement pour tout travail scientifique d'inspiration originale. Je tends donc la main à la sécession. Il m'a semblé seulement que l'énergétique s'est laissé illusionner par des analogies superficielles et purement formelles, que ses lois se sont privées de la structure ordinairement claire et précise de la physique classique, ses conclusions de la rigueur qui en aurait pu résulter, et qu'elle a rejeté ainsi beaucoup de richesses du passé indispensables à la science. Il m'a semblé aussi que le débat consistant à attribuer l'existence soit à la matière, soit à l'énergie, était un retour à l'ancienne métaphysique que l'on croyait avoir vaincue, et présentait le défaut de méconnaître que tout concept n'est qu'une image.

» En exprimant sur tous ces sujets, sans éveiller aucun écho, ma conviction profonde, je pensais par là même manifester plus d'intérêt en faveur de la propagation de la doctrine de l'énergie qu'en me bornant à des louanges. De même qu'en la mécanique de Hertz je ne peux apercevoir, dans la thèse qui consiste à déduire toute la physique du théorème

[1] [14], p. 218.

des deux facteurs de l'énergie et du principe de variation connexe, qu'un idéal pour le lointain avenir [1]. »

Des énergétistes, Boltzmann en vient aux tenants de la phénoménologie en lesquels il voit les « sécessionnistes » les plus marqués. Leur doctrine est une réaction contre le fait que l'ancienne méthode de recherche considérait les hypothèses sur l'organisation des atomes comme le but véritable de la science et par suite les lois obtenues à l'égard des processus sensibles comme de simples moyens de vérification de ces hypothèses.

Mais, nous dit Boltzmann, cela n'était vrai que des extrémistes. Déjà Clausius distinguait entre la *thermodynamique générale* indépendante de toute hypothèse moléculaire et la *thermodynamique restreinte (spezielle Wärmetheorie)* fondée sur une hypothèse moléculaire. Beaucoup d'autres physiciens, comme Ampère, F. Neumann, Kirchhoff, ne mettaient aucune représentation moléculaire à la base de leurs déductions, même s'ils ne niaient pas la structure atomique de la matière. Au début de ses travaux sur l'électromagnétisme, Maxwell avait pensé que le milieu de propagation se composait d'un grand nombre d'êtres mécaniques, mais d'une construction si compliquée qu'ils ne pouvaient servir que de moyens auxiliaires pour parvenir à des équations : il n'était pas question d'y voir un véritable modèle de la réalité. Par la suite, Maxwell devait montrer que beaucoup d'autres mécanismes pouvaient conduire au même but, dès l'instant qu'ils remplissaient certaines conditions. Mais toutes les tentatives pour trouver un modèle mécanique vraiment simple échouèrent. Cela devait aplanir le terrain en faveur de la thèse de Hertz.

« On parvint alors à ce jugement de Salomon consistant, une fois obtenues des équations, à les admettre sans aucune démonstration, à les comparer aux faits d'expérience et à voir dans leur accord avec ceux-ci la meilleure preuve de leur exactitude.

» Ce point de vue, poussé ici à l'extrême, rencontra un accueil des plus mélangés. Tandis que certains avaient presque tendance à y voir une mauvaise plaisanterie, d'autres y virent dorénavant le but unique de la physique : sans aucune hypothèse, sans la moindre illustration ou explication mécanique, souscrire pour chaque série de processus à des équations à partir desquelles on puisse calculer leur évolution, de telle sorte que la seule tâche de la physique consiste à trouver par tâtonnement des équations aussi simples que possible, satisfaisant à des conditions formelles telles que l'isotropie, puis à les comparer avec l'expérience. Cela est la direction extrême de la phénoménologie, que je vou-

[1] [14], pp. 218-219.

drais qualifier de *mathématique*, tandis que la *phénoménologie générale* cherche à décrire tout groupe de faits par l'énumération et la description de tous les phénomènes correspondants, sans limitation des moyens employés, mais en renonçant à toute conception unitaire de la nature, à toute illustration mécanique ou autre. Cette thèse est caractérisée par la sentence citée par Mach : l'électricité n'est autre chose que la somme des expériences qui ont été faites en ce domaine et que l'on espère encore y faire. Les deux phénoménologies ont comme objectif de traduire l'expérience, sans aller au-delà de l'expérience [1]. »

Boltzmann dénonce, une fois de plus, l'illusion qui consiste à prétendre ne rien ajouter à l'expérience :

« Aucune équation ne peut traduire exactement un événement quel qu'il soit : elle l'idéalise nécessairement et va au-delà de l'expérience. Que cela soit inévitable, quand nous voulons disposer de quelque représentation que ce soit qui nous permette de formuler des prévisions, provient du processus même de notre pensée, qui consiste à ajouter quelque chose à l'expérience, et à former une image mentale, laquelle ne s'identifie pas à l'expérience et, par là même, peut représenter de nombreuses expériences.

» L'expérience, nous dit Gœthe, n'est jamais qu'à moitié expérience *(Die Erfahrung ist immer nur zur Hälfte Erfahrung)*. Plus hardiment on dépasse l'expérience, plus on peut atteindre des aperçus généraux et découvrir des faits insoupçonnés, mais aussi plus on peut se tromper. La phénoménologie ne devrait donc pas se vanter de ne pas dépasser l'expérience, mais au contraire nous inciter à le faire dans toute la mesure du possible.

» Elle se trompe encore quand elle pense ne superposer aucune image à la nature. Les nombres, leurs rapports et leurs combinaisons sont aussi bien des images que les représentations géométriques de la mécanique rationnelle. Les premiers sont seulement plus sobres, directement utilisables dans une représentation quantitative, mais ils sont en revanche peu aptes à la découverte de nouvelles perspectives ; ils constituent de piètres guides heuristiques. Donc toutes les représentations de la phénoménologie générale se révèlent être des images des faits [2]. »

Boltzmann dénonce également l'illusion complémentaire des sensualistes :

« On ne doit pas non plus, comme cela a été reproché aux atomistes, s'aveugler sur les images et y voir des faits. Toute théorie conduit à cet écueil quand elle est exploitée trop exclusivement. Ce n'était donc pas

[1] [14], pp. 220-221.
[2] *Ibid.*, p. 222.

une propriété spécifique de l'atomisme que de se fier aux images, mais une faute occasionnelle que d'avoir méconnu ce danger. Le mathématicien peut tomber dans la même erreur en confondant ses formules avec la vérité. On la trouve chez les phénoménologues quand ils ne reconnaissent pas les multiples faits qui ne sont compréhensibles que du point de vue de la thermodynamique restreinte, chez les adversaires de l'atomisme qui ignorent tout ce qui plaide en sa faveur, et même chez Kirchhoff lorsque, se fiant à ses équations hydrodynamiques, il tient pour impossible l'absence d'uniformité de la pression au sein d'un gaz conducteur [1]. »

La phénoménologie semblait devoir conduire à une physique du continu. Mais, dans son finitisme mathématique, Boltzmann ne peut que conclure à la nécessité de l'atomistique :

« La phénoménologie mathématique semblait devoir naturellement ramener, conformément aux apparences, à une représentation continue de la matière. Mais j'ai appelé l'attention sur le fait que les équations différentielles qu'utilise la phénoménologie représentent, par définition, de simples passages à la limite. S'il est ainsi clair que les phénoménologues, dissimulés sous le vêtement des équations différentielles, n'en recourent pas moins à des individus du genre des atomes qu'ils devraient, pour chaque groupe de phénomènes, supposer donnés avec des propriétés variées et fort compliquées, on éprouvera bientôt le besoin d'une atomistique unique et simplifiée [2]. »

A l'époque où Boltzmann menait ce combat contre la phénoménologie régnante, les théories moléculaires — temporairement du moins — ne portaient plus de fruits. Cela rendait sa position particulièrement difficile, alors qu'un avenir très proche, mais encore inaperçu, devait lui donner bientôt raison :

« Les énergétistes et phénoménologues avaient conclu à la décadence de la théorie moléculaire devant son défaut actuel de fécondité. Certains ont cru à une simple éclipse, d'autres sont allés plus loin : ils pensaient que l'hypothèse moléculaire avait été utile, en ce sens que les équations dont les phénoménologues font maintenant la substance même de la physique avaient toutes été obtenues à l'aide d'hypothèses moléculaires ; mais ils ajoutaient que dès l'instant où on possédait ces équations, ces hypothèses étaient devenues superflues. Tous en jurèrent la mort *(alle schworen ihre Vernichtung)* [3]. »

Boltzmann fait grief à ses adversaires d'avoir invoqué en faveur de leur thèse le « principe historique » et d'avoir invité tous les théoriciens

[1] [14], pp. 222-223.
[2] *Ibid.*, p. 223.
[3] *Ibid.*

de la physique à brûler ce qu'ils avaient adoré. Mais la leçon de l'histoire est parfois à double tranchant : « Conformément à ce qu'on appelle le principe historique, les énergétistes et phénoménologues ne devraient pas vaincre définitivement, sans quoi leur défaite suivrait bientôt [1]. »

Et Boltzmann poursuit :

« A l'exemple de Clausius, les tenants de la thermodynamique restreinte n'ont jamais contesté la haute valeur de la thermodynamique générale ; mais les succès de la seconde ne prouvent rien contre la première. On peut seulement se demander si, à côté de ces succès, il en est d'autres que l'atomistique seule soit capable d'atteindre. Celle-ci, longtemps après le temps de son ancienne splendeur, en a donné beaucoup d'exemples. C'est ainsi que Van der Waals, partant de principes purement moléculaires, a établi une formule qui, sans rendre compte exactement du comportement des fluides, des gaz et des vapeurs et de leurs changements d'état, en donne une approximation remarquable et conduit à beaucoup de résultats nouveaux, comme par exemple la théorie des états correspondants. Plus récemment, des considérations de théorie moléculaire ont montré comment on pouvait améliorer cette formule, et l'espoir n'est pas interdit de pouvoir représenter de façon précise le comportement des substances chimiques les plus simples comme l'argon, l'hélium, etc., en sorte que l'atomistique s'est approchée très près de l'idéal de la phénoménologie, dans la voie d'une formule mathématique traduisant tous les états des corps. Sur cela s'est greffée une théorie cinétique des liquides [2]. »

Boltzmann souligne encore que l'atomistique a beaucoup contribué à concrétiser et à étendre la théorie de la dissociation de Gibbs. Pour préciser la chose, reportons-nous à la *Gastheorie* :

Gibbs avait établi cette théorie à partir des principes de la thermodynamique générale, sans faire appel à la dynamique moléculaire. « Cependant, les déductions de Gibbs reposent sur l'hypothèse que, dans un gaz dissocié, toutes les parties constituantes se comportent d'une façon indépendante comme des gaz isolés et que leurs énergies, leurs entropies, leurs pressions, etc., s'ajoutent. Cette hypothèse est très claire au point de vue de la théorie moléculaire, puisque les différentes molécules, situées au voisinage les unes des autres, y sont réellement séparées ; de plus, il résulte nettement de plusieurs passages que Gibbs avait continuellement présente à l'esprit cette idée de la théorie moléculaire, même quand il ne se servait pas des équations de la mécanique moléculaire.

[1] [14], p. 224.
[2] *Ibid.*

» Si on se place, au contraire, au point de vue moderne que Mach et Ostwald ont développé avec beaucoup de sagacité, on estime que, dans la combinaison chimique, quelque chose de complètement nouveau est simplement venu se substituer aux particules constituantes... L'hypothèse d'après laquelle les énergies et les entropies respectives [des constituants] s'ajouteraient, perd alors toute signification ; mais, sans cette hypothèse, les équations fondamentales de la dissociation ne peuvent être déduites, ni des deux principes de la thermodynamique, ni de n'importe quels principes énergétiques. Il ne reste donc plus qu'à considérer simplement ces équations comme données empiriquement.

» Il ne saurait être question de considérer comme suffisantes, dans le calcul des phénomènes naturels, les équations toutes seules sans leurs bases, non plus que de regarder des équations confirmées empiriquement comme présentant un degré de certitude plus élevé que les hypothèses sur lesquelles elles s'appuient. D'autre part, la représentation mécanique me paraît nécessaire pour servir de base aux équations abstraites et les rendre intelligibles, absolument comme dans d'autres cas la construction géométrique des relations algébriques. De même que l'Algèbre pure ne rendra jamais celle-ci tout à fait inutile, de même, *à mon avis, on ne se passera jamais complètement de l'aide que la dynamique des molécules apporte à la conception des lois applicables à l'action des masses macroscopiques, douterait-on de la perceptibilité des molécules, et même de leur existence.* Cette représentation a certainement une importance scientifique aussi grande que la coordination des résultats expérimentaux par des lois et des formules [1]. »

Boltzmann rappelle encore que l'atomistique a rebâti les équations de l'hydrodynamique et montré comment ces équations, ainsi que celles de la propagation de la chaleur, devaient être modifiées.

Il revient sur la détermination, par la théorie cinétique, du rapport des chaleurs spécifiques d'un gaz à pression constante et à volume constant. Clausius avait établi que, dans le cas des gaz les plus simples, dont les molécules se comportent comme des sphères élastiques, ce rapport devrait être de 5/3, valeur qui ne correspondait alors à aucun gaz connu. Maxwell avait trouvé, pour les molécules parfaitement élastiques ne présentant aucune symétrie de révolution, le rapport 4/3. Il passait ainsi à côté du rapport — souvent constaté — de 1,4 offert par les gaz dont les molécules, sans être sphériques, présentent une symétrie de révolution.

L'estimation de Clausius devait être vérifiée pour la vapeur de mercure par Kundt et Warburg, et plus tard par Ramsay pour les nouveaux gaz rares : hélium, néon, argon, krypton. « Quelle influence, se demande

[1] [2], II, § 72, pp. 207-208.

Boltzmann, cela aurait eu sur l'histoire de la théorie des gaz, si Maxwell n'était pas tombé dans cette légère erreur ou si les nouveaux gaz avaient été connus au moment du premier calcul de Clausius [1] ? »

Boltzmann — qui écrit au lendemain de l'objection Zermelo — ne mentionne ici que brièvement ses propres travaux sur la signification probabiliste de l'entropie :

« Je mentionne enfin la relation que la théorie moléculaire enseigne entre le théorème de l'entropie et le calcul des probabilités, dont la véritable signification est controversée, mais dont tout esprit non prévenu conviendra qu'elle est de nature à élargir nos idées et à servir d'indication pour de nouvelles combinaisons de pensée et même pour de nouvelles expériences [2]. »

Et Boltzmann de conclure, tout en sachant pertinemment qu'il ne convaincrait pas ses contradicteurs :

« Tous ces résultats, ainsi que les innombrables conquêtes antérieures de l'atomistique, n'auraient jamais pu être obtenus par la phénoménologie ou l'énergétique, et je pense qu'une théorie qui fournit d'elle-même ce qu'on ne pourrait obtenir par une autre voie et en faveur de laquelle parlent tant de faits d'expérience en physique, en chimie et en cristallographie, ne doit pas être combattue, mais au contraire protégée [3]. »

Ne voulant préjuger de l'avenir, Boltzmann se borne à le ponctuer d'une série d'interrogations :

« L'ancienne mécanique avec ses forces traditionnelles, quoique dépouillée de la métaphysique, subsistera-t-elle en ses traits essentiels ou ne gardera-t-elle qu'un intérêt historique, ayant été supplantée par les masses cachées de Hertz ou par une représentation toute différente ? De l'actuelle théorie moléculaire, en dépit de tous compléments et modifications, restera-t-il seulement l'essentiel ; l'une des différentes atomistiques actuelles finira-t-elle par régner, ou contrairement à ma propre argumentation, la seule image du continu se révélera-t-elle la meilleure ? Le mécanisme gagnera-t-il un jour une bataille essentielle en découvrant un modèle simple de l'éther lumineux, certains modèles mécaniques subsisteront-ils du moins, de nouvelles représentations non mécaniques se révéleront-elles les meilleures, les deux facteurs de l'énergie régiront-ils un jour tous les phénomènes ou, en dernière analyse, se contentera-t-on de décrire chaque agent comme la somme de toutes sortes de phénomènes, ou enfin la théorie physique se réduira-t-elle à un simple jeu de formules et à la discussion des équations correspondantes ?

[1] [14], p. 225.
[2] *Ibid.*, p. 226.
[3] *Ibid.*

» La conviction pourra-t-elle naître que certaines images ne pourront plus être supplantées par d'autres plus simples et plus vastes, que par suite elles doivent être tenues pour « vraies », ou nous ferons-nous peut-être la meilleure représentation de l'avenir quand nous arriverons à nous représenter ce dont aujourd'hui nous n'avons aucune représentation ?

» Voilà en fait d'intéressantes questions ! On regrette presque de devoir mourir avant de les voir tranchées. O mortel indiscret !...

» Au reste, ne vaudrait-il pas mieux travailler ce qui est à notre portée que de nous casser la tête pour des choses si lointaines. Mais le siècle a-t-il assez produit ! Il lègue à celui qui vient une abondance inattendue de faits positifs, une critique et une sélection précieuse des méthodes de recherche. Chez les Spartiates, un chœur guerrier criait aux jeunes : Soyez encore plus braves que nous ! Si, conformément à la tradition, nous devons offrir au siècle qui vient une bénédiction, souhaitons-lui donc — avec le même orgueil que les Spartiates — d'être encore plus grand et plus important que celui qui s'achève [1]. »

[1] [14], p. 227.

CHAPITRE X

Boltzmann et la mécanique statistique

Dans un exposé présenté en 1904 au Congrès de Saint-Louis et où il traite essentiellement de philosophie des sciences, Boltzmann a été amené à donner son sentiment sur ce que Gibbs avait appelé la mécanique statistique :

« Comme dans les équations différentielles de la mécanique elles-mêmes, il n'existe absolument rien d'analogue au second principe de la thermodynamique, celui-ci ne peut être interprété mécaniquement que moyennant des hypothèses sur les conditions initiales. Pour en trouver d'utilisables à cet égard, on doit admettre qu'il est nécessaire, pour étudier les corps continus en apparence, de supposer l'existence d'atomes ou d'individus mécaniques plus généraux qui se trouvent en très grand nombre dans les différentes situations initiales. Pour traiter mathématiquement cette hypothèse, on créa une science particulière, ayant pour objet de trouver non pas le mouvement d'un système individuel, mais les propriétés d'un complexe constitué de très nombreux systèmes mécaniques partant des conditions initiales les plus variées. Le mérite d'avoir systématisé cette science, de l'avoir exposée dans un large traité et de lui avoir donné un nom caractéristique appartient à l'un des plus grands savants américains, le plus grand peut-être dans le domaine propre de la pensée abstraite et de la recherche théorique, Willard Gibbs, le professeur de Yale College récemment disparu. Il appela cette science la mécanique statistique. Celle-ci se divise en deux parties. La première recherche les conditions dans lesquelles les propriétés extérieurement observables d'un complexe composé d'un grand nombre d'individus mécaniques restent entièrement invariables, en dépit d'un mouvement intense des individus ; je la qualifierai volontiers de statique statistique *(statistische Statik)*. La seconde calcule les modifications successives des propriétés extérieurement observables [du complexe] lorsque les conditions [d'équilibre] cessent d'être satisfaites ; on peut l'appeler dynamique statistique *(statistische Dynamik)*. Je ne puis indiquer ici que

d'un mot les perspectives que nous ouvre cette science si on en imagine l'application, non plus seulement aux corpuscules de la mécanique, mais à la statistique des êtres vivants, des ensembles humains, de la sociologie, etc. [1] »

Dans cet éloge dicté par le temps et le lieu, Boltzmann ne pouvait que s'interdire de rappeler l'antériorité qui était la sienne dans le traitement statistique des ensembles de systèmes satisfaisant aux équations canoniques de la mécanique analytique classique. Il est toutefois permis de voir, dans la distinction qu'il propose ici entre dynamique et statique statistiques une critique aussi justifiée que discrètement voilée ; car Gibbs avait traité essentiellement des états d'équilibre statistique, ou des états voisins d'un tel équilibre, allant sensiblement moins loin que Boltzmann dans la définition de l'entropie d'un état quelconque. Cela, nous le verrons en son temps. Reprenons pour l'instant notre citation :

« On ne saurait entrer dans le détail de cette science que par le moyen de formules mathématiques, et cela dans une série de leçons. Cette science n'est en effet pas exempte, non seulement de difficultés mathématiques, mais aussi de difficultés de principe. Elle est fondée notamment sur le calcul des probabilités. Celui-ci est aussi rigoureux que toute autre théorie mathématique, *dès l'instant où le concept d'égale probabilité est défini*. Mais ce concept, en tant que notion fondamentale, ne peut à son tour être déduit et doit être considéré comme donné. Il en est de même que pour les formules de la méthode des moindres carrés, lesquelles ne se laissent développer sans contradiction que moyennant des hypothèses précises sur l'égalité des probabilités des erreurs élémentaires. Ces difficultés de principe expliquent que le résultat le plus simple de la statique statistique, savoir l'établissement de la loi de répartition des vitesses de Maxwell, donne toujours matière à discussion [2].

[1] [19], pp. 360-361.

[2] Ces difficultés n'ont rien perdu de leur actualité. C'est ainsi que L. de Broglie appelle l'attention sur le fait que lorsqu'on veut appliquer le calcul des probabilités à une question concrète, il y a toujours une hypothèse arbitraire de nature physique à la base de cette application. En mécanique statistique classique on admet, ce que le théorème de Liouville rend possible, que la probabilité de trouver le point représentatif d'un système dans un domaine $d\tau$ de l'extension en phase est proportionnelle à la grandeur de $d\tau$. Pour les systèmes d'énergie constante E (connue à dE près), l'hypothèse ergodique ou sa variante l'hypothèse quasi ergodique, a paru très difficile à justifier. « Pour pouvoir le faire, il semble nécessaire d'introduire, sous une forme ou sous une autre, un postulat de nature statistique (par exemple l'hypothèse du chaos moléculaire de Boltzmann), postulat qui par sa nature même est étranger aux lois de la mécanique classique et ne peut être justifié par elles. » De même, en mécanique ondulatoire, il semble nécessaire de justifier l'hypothèse $\varrho = \psi^2$ qui est naturelle, mais arbitraire, par la démonstration d'une sorte de théorème d'ergodicité. (Cf. [8], pp. 160-164.)

» Les théorèmes de la mécanique statistique sont des conséquences directes des hypothèses faites et demeureront toujours valables, comme toute proposition mathématique bien fondée. *Mais leur application aux événements naturels est le prototype de l'hypothèse physique.* Si nous partons des hypothèses les plus simples sur l'égale probabilité, nous obtenons pour le comportement d'agrégats de très nombreux individus des lois tout analogues à celle que l'expérience révèle pour le comportement du monde matériel. Le mouvement visible de progression ou de rotation se transforme nécessairement en mouvement invisible des petites particules, en mouvement calorifique. Selon l'expression caractéristique de Helmholtz : le mouvement organisé se transforme toujours en mouvement inorganisé ; le mélange des différentes matières, celui des températures, des domaines où les mouvements moléculaires sont plus ou moins rapides tend toujours à réaliser une plus grande uniformité. Le fait que ce mélange n'était pas parfait à l'origine, que le monde est toujours parti d'un état initial très peu probable peut être compté au nombre des hypothèses fondamentales de toute la théorie, et on peut dire que la raison en est aussi peu connue que celle pour laquelle le monde est ainsi et non autrement. Mais on peut encore adopter un autre point de vue. Les états très hétérogènes ou les grandes différences de température ne sont pas en théorie absolument impossibles, mais seulement extrêmement improbables... Si l'on conçoit l'Univers comme étant suffisamment grand, il pourra y avoir, ici ou là, des domaines de la dimension du ciel des étoiles fixes où régnera une répartition extrêmement improbable. Aussi bien dans leur formation que dans leur disparition il y aura une direction du temps, en sorte que des êtres pensants, placés en de tels domaines, auront du temps exactement la même impression que nous, bien que dans l'Univers il n'y ait aucune direction temporelle [1]. La théorie ainsi développée va audacieusement au-delà de l'expérience, mais elle possède la propriété, que doit avoir toute théorie de ce genre, de placer les faits d'expérience sous un jour entièrement nouveau, et d'inciter par là même à de nouvelles spéculations et à de nouvelles recherches. Au contraire du premier principe, le second principe de la thermodynamique apparaît ainsi comme un pur théorème de probabilité, comme Gibbs le disait déjà au cours des années 70 du siècle précédent [2,3]. »

[1] Ceci est un bref résumé de la théorie boltzmannienne des *mondes individuels*, sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir plus longuement.

[2] Allusion à la déclaration suivante de Gibbs, fréquemment citée par Boltzmann : « *The impossibility of an incompensated decrease of entropy seems to be reduced to an improbability.* » (*Conn. Acad. Trans.*, vol. III, 1875, p. 229.)

[3] [19], pp. 361-363.

CHAPITRE XI

Objet et nature des théories physiques

C'est dans un discours prononcé en 1890 à l'Université de Graz que Boltzmann s'est le plus nettement expliqué sur l'objet et la nature des théories physiques :

« Je ne serais pas un véritable théoricien si je ne posais tout d'abord la question : Qu'est-ce que la théorie ? Ce qui frappe avant tout le profane, c'est qu'elle est difficile à comprendre et s'accompagne d'une nuée de formules n'ayant aucun sens pour les non-initiés. Mais cela n'est pas sa vraie nature ; le véritable théoricien épargne les formules, autant qu'il le peut ; il exprime avec des mots ce qui se laisse dire en mots, tandis que dans les livres des praticiens les formules ne figurent trop souvent qu'à titre de simple ornement.

» Un de mes amis définissait le praticien comme celui qui ne comprend rien à la théorie et le théoricien comme un idéologue qui ne comprend rien.

» Selon mon sentiment, la tâche de la théorie réside dans la construction d'une image du monde extérieur, laquelle n'existe que dans notre esprit et doit nous servir de guide dans toutes nos pensées et toutes nos expériences...

» C'est une tendance naturelle de l'esprit humain de se forger une telle image et de l'adapter de mieux en mieux au monde extérieur... Robert Mayer et Faraday étaient des théoriciens en ce sens que leur guide était une image abstraite, bien plus que le souci des applications pratiques...

» Le but principal de la théorie est de perfectionner continuellement cette image. *L'imagination est toujours le berceau de la théorie, l'esprit d'observation son précepteur*... Il est tout naturel que les empiristes et les praticiens aient méprisé [les premières théories naïves de l'Univers] et cependant celles-ci contenaient en germe toutes les théories futures... On peut dire aujourd'hui que la théorie a conquis le monde...

» Plus la recherche théorique est abstraite, plus elle est puissante...

» Même si l'on ne voit dans la théorie qu'une vache à lait, on ne peut douter de sa puissance [1]. »

Nichts ist praktischer als Theorie, professait encore Boltzmann, si on en croit le témoignage de Nernst [2].

» La théorie est loin de se pouvoir surestimer ; elle porte en elle-même ses propres insuffisances et il lui appartient de découvrir ses propres erreurs, comme déjà Socrate attachait une importance essentielle à la connaissance des lacunes de sa propre pensée...

» J'ai qualifié la théorie d'image intérieure purement mentale et nous connaissons les achèvements dont elle est capable. Mais comment, au fur et à mesure de l'approfondissement d'une théorie, s'empêcher d'en doter l'image d'une véritable existence ? En ce sens, Hegel doit avoir regretté que la nature n'ait pas décidé de réaliser dans sa plénitude son système philosophique...[3] »

Et Boltzmann, qui quittait alors Graz pour Munich, de conclure en souhaitant à l'Université de Graz de demeurer un « rempart de la théorie ».

A l'occasion du débat qu'il devait avoir quelques années plus tard avec l'école anglaise, Boltzmann s'interroge à nouveau sur la nature des théories physiques et sur les conditions auxquelles elles doivent satisfaire.

Pendant longtemps la théorie de Boscovich, où l'éther aussi bien que la matière se composaient de points matériels entre lesquels s'exerçaient des forces simples fonctions de leurs distances mutuelles a constitué l'idéal des physiciens. « Si cette théorie était valable pour tous les phénomènes, nous serions encore loin de tout savoir, comme le souhaitait le *famulus* de Faust. Mais la difficulté d'énumérer tous les points matériels de l'Univers et de déterminer la loi de force agissant sur chaque paire de points ne serait que quantitative. La nature poserait un problème difficile, mais ne serait pas un mystère pour l'esprit humain [4]. »

Dire, avec Lord Salisbury, que la nature est un mystère revient à reconnaître que la conception de Boscovich est contredite dans presque toutes les branches de la science, y compris d'ailleurs la théorie cinétique des gaz.

« L'atome de chaque élément, demandait Lord Salisbury, [1], est-il mouvement, objet, tourbillon, point doué d'inertie ? Toutes ces questions sont entourées d'une obscurité profonde. Je n'oserais pas recourir à un mot moins pédant que celui d'entité pour qualifier l'éther, car ce serait largement exagérer la connaissance que nous en avons que d'en parler comme d'un corps ou d'une substance. »

[1] [7], pp. 76-78.
[2] Cité par Broda, [1], p. 96.
[3] [7], pp. 79-80.
[4] [36], p. 535.

Si cela est vrai, déclare Boltzmann, ni la théorie cinétique des gaz, ni aucune autre théorie physique ne peut prétendre à rendre véritablement compte des faits. Et, avec Hertz, on doit convenir que la rigueur de la science exige de distinguer la nature elle-même du manteau bigarré dont nous l'habillons à notre fantaisie. Mais ce serait faire preuve de trop de prédilection pour la nudité que de proscrire toute hypothèse. Tout au plus doit-on limiter ce qu'on demande à l'hypothèse.

A ce propos, Boltzmann note combien il est curieux de voir qu'en Allemagne, où la théorie des actions à distance a été beaucoup plus cultivée que dans la patrie de Newton, où la théorie électromagnétique de Maxwell n'a pas trouvé audience, parce qu'elle ne partait pas d'une hypothèse précise, toute théorie fondée sur des modèles est aujourd'hui démodée, tandis qu'en Angleterre la théorie cinétique des gaz est encore active.

« Aucune hypothèse n'a jusqu'ici atteint le fond des choses ; la théorie des gaz pas davantage. Mais cette théorie s'accorde à tant d'égards avec les faits, que l'on peut à peine douter que certaines entités, dont on peut déterminer approximativement le nombre et les dimensions, se meuvent pêle-mêle dans les gaz. Mais peut-on sérieusement attendre qu'elles se conduisent exactement comme des agrégats de centres newtoniens de forces, ou comme les solides rigides de notre mécanique ? Combien maladroit se montre l'esprit humain à pénétrer la nature des choses, quand il est abandonné par l'analogie de ce que nous pouvons directement voir et toucher [1]. »

Pour Boltzmann, qui est avant tout un imaginatif, la théorie physique est chose vivante. C'est en artiste qu'il interprète Maxwell :

« De même que, dès les premières mesures, un musicien reconnaît Mozart, Beethoven ou Schubert, les mathématiciens distinguent, après quelques pages, entre Cauchy, Gauss, Jacobi et Helmholtz. Une extrême élégance formelle, jointe à quelque fragilité dans l'armature des déductions, caractérise l'école française ; la plus grande force dramatique est la marque de l'école anglaise, et avant tout de Maxwell. Qui ne connaît sa théorie dynamique des gaz ? Tout d'abord se développent majestueusement les variations des vitesses, ensuite s'insèrent les équations d'état, et le chaos des formules se gonfle de plus en plus. Tout à coup retentissent les quatre mots « *Put* $n = 5$ » [2]. Le méchant démon V disparaît, comme en musique une figure turbulente et qui jusque-là dominait l'ensemble se tait subitement devant la basse. Comme sous le coup d'une baguette magique s'ordonne ce qui auparavant paraissait indomptable.

[1] [36], pp. 536-537.

[2] Allusion à l'hypothèse selon laquelle les molécules se repousseraient en raison inverse de la cinquième puissance de leur distance.

Le temps manque de justifier telle ou telle substitution ; que celui qui n'en saisit pas la raison jette le livre. Maxwell n'est pas un musicien à programme, qui donne de ses notes une explication. Maintenant les formules livrent sans effort [1] résultat après résultat, jusqu'à la surprise de l'effet final, offerte par l'équilibre statistique d'un gaz pesant, et le rideau tombe [2]. »

[1] Littéralement : *speien* (crachent).
[2] [6], p. 73.

CHAPITRE XII

Boltzmann et la philosophie

Boltzmann devait succéder à Mach dans la chaire de *Naturphilosophie* de l'Université de Vienne. Dans la leçon inaugurale qu'il prononce le 26 octobre 1903, il se tire habilement, sans trop y insister, de l'éloge obligé d'un prédécesseur dont tout le séparait.

Boltzmann avouait n'avoir écrit jusque-là qu'un seul mémoire de contenu philosophique ; il s'agissait d'un débat des plus vifs qui opposait, à l'Académie de Vienne, tenants et adversaires de l'atomisme. Mach était au nombre des opposants de Boltzmann :

« Mach a montré de la façon la plus ingénieuse qu'aucune théorie n'est absolument vraie, ni à vrai dire absolument fausse, et que bien plutôt toute théorie doit être graduellement perfectionnée, comme les organismes dans la théorie de Darwin. Du fait qu'une théorie est violemment combattue, ce qu'elle renfermait d'inutile disparaît tandis que subsiste ce qu'elle a d'utile, et je pense ainsi rendre le meilleur hommage au professeur Mach si je m'emploie de cette manière, dans la mesure de mes forces, au développement de ses idées.

» Dans ce groupe d'académiciens, au cours du débat sur l'atomisme, Mach laissa brusquement tomber ces mots : « Je ne crois pas à l'existence des atomes. » Cette sentence me trotta dans la tête.

» Je voyais clairement que nous réunissons des groupes d'observations pour en faire des représentations d'objets, comme celles d'une table, d'un chien, d'un homme, etc. Nous associons aussi des réminiscences à de telles représentations. Quand nous nous donnons de nouvelles représentations qui sont tout à fait analogues à ces images de la mémoire, la question de savoir si les objets correspondants ont ou non une existence a véritablement un sens. Nous savons ainsi exactement ce que signifie l'existence d'un griffon, d'un unicorne ou celle d'un mien frère. Au contraire, si nous formons des représentations entièrement nouvelles, comme celles de l'espace, du temps, des atomes, de l'âme, de Dieu même, que comprend-on, me demandais-je, quand on s'interroge sur leur existence ?...

» C'étaient des discussions de cette nature qui formaient le sujet de mon unique mémoire dans le domaine de la philosophie. Vous voyez que celui-ci était certes authentiquement philosophique ; tout au moins assez abstrus pour mériter ce qualificatif [1]. »

Boltzmann poursuit alors sa leçon inaugurale. Il tient beaucoup à se présenter comme un paysan du Danube à l'égard des différents systèmes philosophiques et met à nous le faire croire un peu trop d'insistance. Aussi bien pourrait-on lui répondre, avec Pascal : se moquer de la philosophie, c'est vraiment philosopher.

« Ce n'est pas sans hésitation, déclare Boltzmann, que j'ai répondu à l'invitation qui m'était faite de me mêler de philosophie, d'autant que beaucoup de philosophes se sont souvent occupés de science. Il y a déjà longtemps qu'ils sont venus chasser sur mes propres terres. Je ne comprenais pas ce qu'ils entendaient dire et voulais, tout d'abord, être mieux informé des fondements de toute philosophie.

» Pour puiser aussitôt au fond des plus grandes profondeurs, je m'attaquai à Hegel ; mais que d'obscurités dans ce déluge de mots ! Ma mauvaise étoile me conduisit de Hegel à Schopenhauer. Dans la préface du premier ouvrage de cet auteur qui me tomba sous la main, je trouvai le passage suivant que je reproduis textuellement : « La philosophie » allemande est là couverte de honte, méprisée de l'étranger et rejetée par » toute science honnête comme... » Je supprime le passage suivant par égard aux dames ici présentes... « Les cerveaux de l'actuelle génération » savante sont désorganisés par les absurdités hégeliennes. Incapables de » penser, grossiers et abrutis, ils seront la proie du plat matérialisme issu » de l'œuf du basilic. » J'étais tout à fait d'accord là-dessus, mais je trouvais que Schopenhauer aurait pu s'appliquer à lui-même ces coups de massue.

» De même, les calculs de Herbardt sur les phénomènes psychologiques me semblaient une caricature de ceux que l'on pratique dans les sciences exactes. Je saisissais si peu de chose chez Kant que j'en arrivai presque à me demander si sa sagacité cherchait à se moquer du lecteur et même à le fourvoyer. Ainsi se développait en moi à l'égard de la philosophie une aversion qui tournait à la haine. A l'égard de ces anciens systèmes philosophiques, j'irais presque jusqu'à dire qu'on a fait de moi un loup dans la bergerie. Ou bien on m'a chargé de cet enseignement comme on nomme conseiller à la Cour un vieux démocrate, pour que de Saül il devienne entièrement Paul. Je crains, au cours de ces leçons, d'osciller entre le rôle du loup et celui du conseiller à la Cour, encore que j'espère ne jamais tomber dans le style dont j'ai donné un échantillon.

[1] [18], p. 339.

Peut-être pourrai-je cependant, en suivant fermement la méthode de Mach, contribuer çà et là au perfectionnement des systèmes philosophiques.

» Au surplus, mon aversion pour la philosophie était alors partagée par presque tous les hommes de science. On critiquait toute tendance métaphysique et on cherchait à l'extirper radicalement ; mais cette disposition d'esprit ne durait guère. La métaphysique semble exercer sur l'esprit humain une irrésistible magie, qui n'a rien perdu de sa puissance à travers toutes les tentatives infructueuses faites pour en lever le voile.

» Notre tendance innée à philosopher est indéracinable. Non seulement Robert Mayer, qui était philosophe jusqu'au bout des ongles, mais aussi Maxwell, Helmholtz, Kirchhoff, Ostwald et beaucoup d'autres ont sacrifié à la philosophie et en ont considéré les problèmes comme étant les plus élevés, en sorte qu'elle est à nouveau tenue aujourd'hui pour la reine des sciences.

» [Francis] Bacon, qui a été à l'origine de la connaissance inductive, qualifiait [la métaphysique] de vierge consacrée à Dieu, en ajoutant malicieusement que cela la condamnait pour toujours à la stérilité. Toutes les tentatives qui ont été faites dans le domaine métaphysique sont demeurées infructueuses, mais nous voulons encore faire la preuve que toute spéculation ne peut être qu'infructueuse. Dès l'origine de cette recherche, nous rencontrons une grande difficulté, celle de définir le concept même de philosophie... En des sujets aussi difficiles, il s'agit avant tout de poser correctement la question. Nous analyserons donc tout d'abord celle-ci de façon très précise. On peut la poser dans les différentes formes que voici : 1. Comment la philosophie est-elle définie par les différents philosophes ? 2. Quelle définition correspondrait le mieux au langage commun ? 3. Laquelle me semble la plus adéquate ? Comment pourrais-je définir le concept de philosophie avec une force irrésistible, sans me soucier, à l'exemple de ce que d'autres ont fait, si cette définition correspond à l'usage courant ou si elle est adéquate ? Comment mon sentiment profond, comment toute fibre de mon être m'obligent-ils à résoudre la question [1] ? Nous pouvons diviser ces questions en d'autres encore et les analyser. Et jamais nous n'atteindrons une rigueur parfaite. Mais je ne poursuis pas davantage l'analyse, car je pense m'être suffisamment fait comprendre [2]. »

Boltzmann accepterait lui-même de tenir la philosophie pour la reine des sciences si elle nous donnait la clef du mystère de notre propre

[1] On ne peut qu'admirer ici l'entière bonne foi avec laquelle Boltzmann, abordant la philosophie dans l'esprit d'un néophyte, s'efforce de poser le problème de la connaissance avec une rigueur toute scientifique, ce qui est sans doute un idéal inaccessible.

[2] [18], pp. 340-342.

existence et de celle du monde, et la raison pour laquelle celui-ci est ainsi et non autrement :

« Si, au-delà des phénomènes, il y a encore autre chose, comment parviendrons-nous à en présumer l'existence ? C'est Schopenhauer, dont je médisais tout à l'heure, qui, si je comprends bien sa pensée, a appelé l'attention sur la nécessité que nous soit donnée, à côté des perceptions, la tendance à imaginer des objets. S'il n'y a rien derrière les phénomènes, un paysage de Mars ou d'un satellite de Sirius n'existerait-il pas réellement, en l'absence de tout être vivant capable de le percevoir ? Si toutes les questions de ce genre sont vides de sens, pourquoi ne pouvons-nous pas les rejeter et comment faire pour les réduire à néant ? L'objet de ces leçons sera de rechercher au moins quelque clarté sur ces matières.

» Je n'ai par avance aucune idée du résultat. Je suis ainsi dans le véritable sentiment de Faust : « *Ich soll lehren mit sauerm Schweiss, was ich selbst nicht weiss* (Je dois enseigner à la sueur de mon front ce que moi-même j'ignore). Aussi ne l'enseignerai-je pas ; je chercherai seulement tout ce qui peut contribuer à apporter quelque lumière dans cette pénombre et vous demande votre concours pour atteindre ce but [1]. »

Et Boltzmann souligne que sa méthode est purement académique, en ce sens qu'elle posera les problèmes plutôt que de prétendre les résoudre. Il s'agit d'examiner les concepts fondamentaux des sciences en les considérant *sub specie philosophandi*.

Nous avons peu de traces de ce que devait être cet enseignement philosophique, qui correspond à la dernière phase de la carrière de Boltzmann.

Arrêtons-nous à une conférence faite devant la *Philosophische Gesellschaft* de Vienne le 21 janvier 1905 : *Über eine These Schopenhauers*, [21] [2].

Boltzmann n'y a pas la prétention d'apporter rien de neuf. Pour en être sûr, dit-il, il faudrait avoir lu toute la philosophie.

Il rappelle que Schopenhauer résolvait l'antinomie traditionnelle entre idéalisme et matérialisme en professant que l'existence du monde tout entier repose à la fois sur le sujet et sur l'objet : un objet ne peut exister que par rapport à un sujet, et réciproquement. Malheureusement, Schopenhauer compliquait la question en soutenant que, par une sorte de dédoublement, un sujet pouvait être son propre objet.

Pour sa part, Boltzmann n'a pas caché son sentiment : « Le nom de Berkeley est celui d'un célèbre philosophe anglais, dont le titre de gloire

[1] [18], p. 343.

[2] Le titre complet, simple transcription des injures de Schopenhauer à l'égard d'un autre philosophe, en était le suivant : « *Beweiss, dass Schopenhauer ein geistloser, unwissender, Unsinn schmierender, die Köpfe durch hohlen Wortkram von Grund aus und auf immer degenerierender Philosophaster sei.* »

est d'être l'inventeur de la plus grande folie qu'un cerveau humain ait jamais professée, celle de l'idéalisme philosophique, qui nie l'existence du monde extérieur [1]. »

En ce qui concerne le temps et l'espace, dont Kant faisait les deux formes de l'*Anschauung*, Schopenhauer soutient d'abord que si le temps était l'unique forme, il n'y aurait aucune simultanéité, rien de permanent, aucune durée. Le temps n'est perceptible que s'il est rempli, et son écoulement que par le changement de son contenu. La permanence d'un objet ne se reconnaît qu'au changement d'autres objets qui lui sont simultanés. De même, si l'espace était l'unique forme, il n'y aurait aucun changement, car le changement n'est que la succession temporelle des états. La juxtaposition n'a aucun sens dans le temps, la succession aucun sens dans l'espace.

Boltzmann refuse d'accorder à ces considérations d'autre contenu véritable que celui-ci : « *Zeit ist Zeit, Raum ist Raum.* » Il ajoute que l'on a fait, depuis Schopenhauer, quelques progrès : par exemple, en construisant l'espace sur la notion de nombre, sans autre appel à l'intuition, et en examinant les propriétés de l'espace liées à l'acceptation de tel ou tel axiome de géométrie, dont aucun n'est d'ailleurs évident *a priori*. On sait de plus que l'espace n'a pas nécessairement trois dimensions, comme Schopenhauer l'admettait *a priori*, et qu'il n'est pas nécessairement euclidien.

Schopenhauer admettait encore la loi de conservation de la matière, que les expériences de Landolt et le comportement du radium semblent remettre en question.

Passons sur la critique que fait Boltzmann des thèses de Schopenhauer en matière de volonté, de libre arbitre, d'esthétique et d'éthique.

Pour Boltzmann, le salut en philosophie ne peut venir que de la leçon de Darwin :

« On doit reconnaître que l'esprit et la volonté ne sont pas des entités distinctes du corps, mais bien davantage des actions complexes de parties de la matière, dont l'évolution augmente constamment l'efficacité ; que l'imagination, la volonté, la conscience de soi, ne sont que les degrés supérieurs de l'évolution de ces forces physico-chimiques de la matière...

» On comprend alors que des processus purement mécaniques soient associés à chaque perception, à chaque détermination de la volonté ; que sensations et volonté soient perturbées et déréglées aussitôt que ces processus mécaniques ne fonctionnent plus correctement... On comprend aussi qu'au moment où différentes représentations interfèrent, il se

[1] Cité par Broda, [1], p. 115.

forme entre les neurones qui leur correspondent des filaments de liaison [1]. »

Boltzmann avait déjà soutenu la même thèse dans un exposé présenté en 1897 à l'Académie des sciences de Vienne : *Über die Frage nach der objektiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur* [13] :

« La liaison intime entre les domaines psychique et physique nous est donnée comme un fait d'expérience. Il est de ce fait hautement probable qu'à chaque processus psychique correspond dans le cerveau un processus matériel, qui lui est subordonné de façon univoque. » Les processus matériels qui ont ainsi leur siège dans le cerveau sont susceptibles des mêmes représentations et des mêmes lois que ceux de la nature inanimée. Les images servant à la description des processus cérébraux doivent pouvoir être étendues à la prévision de tous les phénomènes psychiques.

« Nous considérons le cerveau comme l'appareil, l'organe servant à la construction des *Weltbilder* », porté par évolution chez l'homme à un haut degré de perfection en vertu de la théorie de Darwin.

Cette identité entre processus psychiques et processus matériels dans le cerveau constitue la clef du *Realismus* au sens de Boltzmann.

Boltzmann discute alors de la nature des lois de la pensée *(Denkgesetze)* :

Ce que les logiciens appellent les lois de la pensée ne sont, au sens de Darwin, que des habitudes héréditaires. Ces lois peuvent être tenues comme données *a priori*, car elles sont innées à l'individu du fait d'une expérience multimillénaire de l'espèce. Elles sont tellement ancrées que nous nous y tenons, même lorsqu'elles cessent de s'appliquer : l'habitude est plus puissante que la connaissance, de même que les illusions des sens ne s'évanouissent pas du fait qu'on en peut donner une explication physique ou psychique.

La tendance à tout classifier est aussi utile que naturelle ; mais si on la pousse à l'extrême, elle devient un lit de Procuste que l'on allonge ou raccourcit arbitrairement pour tout inclure dans un schéma rationnel.

« Ces lois de la pensée, déclarait Boltzmann en 1904 au Congrès de Saint-Louis, se sont formées suivant la même évolution que l'appareil optique de l'œil, l'appareil acoustique de l'oreille, le système de pompe du cœur. Au cours de l'évolution de l'humanité, tout ce qui était inutile a été éliminé, d'où cette unité et cette perfection qui peuvent donner l'illusion de l'infaillibilité. Ainsi l'ordonnance de l'œil, de l'oreille, du cœur, peut provoquer notre émerveillement sans que cependant l'on puisse croire à la perfection absolue de ces organes. Les lois de la pensée

[1] [21], p. 396.

ne peuvent pas davantage être considérées comme absolument infaillibles [1]. » Elles se sont certes formées pour répondre aux nécessités de la conservation de l'existence, mais nous devons les perfectionner comme la technique a dû perfectionner ses outils. « *Notre tâche n'est pas de citer les faits devant le tribunal de nos lois de pensée, mais au contraire d'adapter aux faits nos idées, nos représentations et nos concepts* [2]. »

Dans sa préoccupation essentielle, qui est de permettre à la science de progresser, Boltzmann voudrait assigner à la philosophie de l'avenir la tâche de formuler les concepts de base de façon à embrasser le monde des phénomènes de la façon la plus précise et la plus utile. Cela en évitant toute contradiction interne, qui serait le signe d'une faille dans les lois de la pensée. Nous devons aussi combattre la tendance naturelle à applique ces lois au-delà de leurs limites de validité :

« Nous devons adapter nos lois de pensée, en sorte qu'elles nous mènent au même but quel que soit le chemin parcouru, qu'elles correspondent à l'expérience et que les coups dépassant le but soient convenablement amortis. Si on ne peut atteindre un tel idéal, on peut du moins s'en approcher. Et cesserait alors cette inquiétude, ce sentiment pénible que tout est énigme, notre existence même, celle du monde ainsi qu'il est fait, la nature de la causalité, etc. Ainsi les hommes seraient libérés de cette migraine mentale, que l'on nomme métaphysique [3]. »

Nous dirons encore quelques mots d'une polémique qui devait opposer Boltzmann à Ostwald, toujours à propos d'énergétique, mais cette fois dans le domaine de la psychologie, où Ostwald s'était aventuré à discuter du bonheur à partir de sa propre physique [20].

Si, déclare Boltzmann, nous souscrivions à une nouvelle forme de l'énergie, celle de l'énergie psychique au sens d'Ostwald, et que nous admettions que celle-ci puisse se transformer en énergie physique et réciproquement, nous reviendrions à la leçon ancestrale de l'existence d'une âme à côté du corps, qu'aucun physiologue ni aucun philosophe n'admettent plus aujourd'hui.

Ostwald se réclamait constamment, en ses écrits, de l'autorité de Mach. Boltzmann se plaît à les opposer l'un à l'autre, en se montrant au besoin plus machiste que Mach. Celui-ci professe que seul nous est donné le déroulement régulier de nos perceptions, et que toutes les grandeurs physiques : atomes, molécules, forces, énergies, ne sont que de simples concepts auxquels nous avons recours pour préciser et représenter « économiquement » ces percep-

[1] [19], p. 353.

[2] *Ibid.*, p. 354. Nous avons vu Boltzmann appliquer cette conception essentiellement dynamique, dans la discussion des principes de la mécanique, à l'occasion de la thèse de Hertz. L'exposé que nous citons ici se termine par un vibrant appel à la collaboration des philosophes et des hommes de science :

« Schiller disait aux philosophes et aux savants de son temps : « Combattez-vous les uns les autres, l'alliance ne viendra que trop tôt. » Sans vouloir le contredire, je pense que maintenant le temps de l'alliance est venu. » ([19], 363.)

[3] [21], p. 401.

tions. Celles-ci sont seules douées d'une existence réelle, et les concepts physiques ne sont que le fruit de notre imagination.

Ostwald n'a retenu qu'une moitié de cette thèse, celle qui concerne l'inexistence des atomes. Et se demandant aussitôt : « Qu'est-ce donc qui existe ? », il s'est persuadé de l'existence de l'énergie. A mon avis, cette réponse est tout à fait opposée au sentiment de Mach, selon lequel on doit considérer l'énergie, aussi bien que la matière, comme une représentation symbolique traduisant certains rapports entre des perceptions, certaines équations entre des phénomènes psychiques [1].

Pour sa part, Boltzmann déduit le concept de bonheur de la théorie de Darwin : il n'existait initialement que des individus très simples, cellules ou petites boules de protoplasme, continuellement animées de mouvements rapides, analogues au mouvement brownien ; leur croissance par absorption de parties semblables, puis une division ultérieure, sont parfaitement concevables par des voies purement mécaniques. Il est également concevable que les mouvements rapides de ces individus se soient modifiés sous l'influence du milieu. De petites boules se sont ainsi mues de préférence là où elles trouvaient de plus grandes possibilités d'absorption (une meilleure nourriture), arrivant ainsi à croître et multiplier au détriment des autres.

Dans ce processus simple et mécaniquement facile à concevoir, nous avons tout ensemble *in nuce* : hérédité, sélection, perception, entendement, volonté, plaisir et douleur. Il suffit d'un développement quantitatif sous l'application continue du même principe pour parvenir, à travers la totalité des règnes végétal et animal, à l'humanité avec tous ses caractères... [2].

Ostwald exprimait la grandeur du bonheur par la formule :

$$E^2 - W^2 = (E + W)(E - W)$$

où E signifie l'énergie dépensée à dessein et avec succès, W l'énergie dépensée malgré soi et à regret. Tout en soulignant l'arbitraire d'une telle formule, Boltzmann remarque que le fait de faire contribuer au bonheur le facteur $E + W$ traduit sans doute la conviction d'un Occidental aimant l'action, mais que pour un bouddhiste, dont l'idéal est la dégradation de la volonté, la formule s'écrirait plutôt $\frac{E - W}{E + W}$. Tout cela n'est évidemment qu'algèbre symbolique et gratuite.

Boltzmann avait pu croire qu'Ostwald voulait plaisanter, mais celui-ci ne devait pas entendre raillerie. Aussi Boltzmann se décida-t-il à considérer comme dangereuse pour la science une thèse en apparence si inoffensive. Car elle confond la vraie mathématique avec de pures formules algébriques, la vraie logique avec de simples syllogismes, la vraie philosophie avec un fatras faussement philosophique, et les arbres y cachent la forêt.

[1] [20], p. 368.
[2] *Ibid.*, p. 369.

Sur la carrière de Boltzmann

Notre propos, en cette étude, n'est pas biographique ; aussi bien serait-il superflu de venir doubler à ce sujet l'excellente monographie de Jäger, [1], et le beau livre récemment consacré par Broda à *Ludwig Boltzmann, Mensch, Physiker, Philosoph*, [1].

Cependant, pour illustrer notre étude, il nous paraît utile de nous arrêter quelques instants aux circonstances essentielles de la carrière de Boltzmann et d'analyser ce que l'on peut appeler le drame boltzmannien, dont le dernier acte devait s'achever par une mort tragique.

Boltzmann naquit à Vienne le 20 février 1844. Après d'excellentes études secondaires à Linz, il entre en 1863 à l'Université de Vienne où il est l'élève de Petzval, de von Ettinghausen et, essentiellement, de Stefan dont il devait interpréter plus tard, sur le plan théorique, la célèbre loi expérimentale du rayonnement, en ayant recours à la pression de radiation de Maxwell.

Dès 1866, à l'âge de 22 ans, Boltzmann passe le doctorat de philosophie ; l'année suivante, il est à la fois *Privatdozent* et assistant de Stefan à l'Institut de physique de l'Université de Vienne [1]. Il y fait la connaissance de Loschmidt auquel il portait une respectueuse amitié, sans abdiquer pour autant — nous le verrons bientôt — le droit de le combattre à l'occasion sur le terrain de la science.

Boltzmann demeura fidèle à l'esprit de cet institut, au point de qualifier lui-même de « *Klein Erdberg* » l'organisme de recherche qu'il devait lui-même fonder à Graz : « Pas plus petit dans l'espace, car notre institut était matériellement deux fois plus grand que celui de Stefan ; mais je n'avais pu m'y soustraire à cet « *Erdberg Geist* »... qui demeura pour ma vie entière le symbole de l'activité expérimentale la plus rigoureuse et la plus profonde. Plus tard encore, à Munich, lorsque les jeunes

[1] Le nom de Boltzmann apparaît pour la première fois dans la littérature en 1865 à l'occasion d'un mémoire sur le mouvement de l'électricité sur les surfaces courbes.

candidats au doctorat venaient à moi avec le désir de travailler, mais sans savoir quel sujet entreprendre, je pensais, à part moi, qu'à Erdberg nous étions d'autres hommes. Aujourd'hui on est entouré des plus beaux appareils et on hésite sur ce qu'on pourrait entreprendre. Nous avions toujours assez d'idées ; notre seul souci était : où donc trouver le matériel ? »

C'est Stefan qui incita Boltzmann à étudier Maxwell et c'est par cette lecture que le jeune étudiant apprit l'anglais, dont il ne savait pas un mot, et qu'il devait maîtriser au point d'y pouvoir donner plus tard des conférences aux Etats-Unis.

Si Boltzmann a été, avant tout, un éminent théoricien, il possédait par atavisme — son grand-père était horloger — un sens pratique très développé et devait faire en électricité de remarquables travaux expérimentaux sur la difficile détermination des constantes diélectriques des gaz, pour en vérifier la connexion, affirmée par Maxwell, avec les indices de réfraction. Il utilise à ce sujet une méthode différentielle fondée sur la comparaison des capacités de deux condensateurs identiques, remplis chacun de deux gaz différents. Pour les solides, Boltzmann utilise l'attraction d'une sphère conductrice chargée sur une sphère non conductrice et montre ainsi que dans un cristal de soufre les constantes diélectriques sont, ici encore, avec les indices de réfraction selon les différentes directions, dans le rapport voulu par Maxwell.

Boltzmann consacra à la théorie électromagnétique de Maxwell un traité où il se présente modestement « comme un manœuvre, dont la tâche était d'aplanir la voie conduisant à l'édifice, de nettoyer la façade et peut-être d'insérer ici ou là quelque pierre de fondation ; car, s'il n'y avait pas de manœuvres, comment les rois pourraient-ils bâtir ?... Trois choses me paraissent nécessaires pour atteindre mon but : clarté, évidence et concision [1]. » Boltzmann se donne ailleurs comme un simple interprète de Maxwell en ce domaine.

De fait, toute l'Allemagne, jusque-là acquise aux idées de Weber, devait s'initier à l'électromagnétisme par le truchement de Boltzmann, qui fut en la circonstance un véritable missionnaire de l'école anglaise sur le continent.

Comme, dans la suite de cette étude, nous ne pénétrons que dans le domaine de la théorie cinétique où Boltzmann a considérablement ajouté à Maxwell, mentionnons encore la théorie boltzmanienne de l'effet Hall ; transcrite en langage moderne, cette théorie a ceci de remarquable, de l'avis de Lorentz [2], qu'elle offrait la première détermination de la vitesse d'un courant d'électrons.

[1] [1], préface.
[2] [3], p. 384.

Revenons à la carrière de Boltzmann. Dès 1869, il est nommé professeur de physique mathématique à l'Université de Graz, qu'il quitte en 1873 pour une chaire de mathématiques à Vienne.

Entre temps, au cours des années 1870 et 1871, Boltzmann se rend à Berlin où il rencontre Helmholtz et Kirchhoff. Habitué à l'aimable familiarité qui régnait à Vienne entre les professeurs et leurs étudiants, Boltzmann s'aperçoit, à ses dépens, que la raideur prussienne s'y opposait : « Je ne me doutais absolument pas qu'il fût inconvenant pour l'étudiant que j'étais de m'accorder un tel ton. Un simple regard de Helmholtz suffit à m'éclairer alors que, dans mes récents travaux au laboratoire de Berlin, j'avais pris, sans penser à mal, notre ton habituel. Et comme je m'en ouvrais à Glan, qui était alors son assistant, il me répondit fièrement : *Sie sind hier in Berlin* [1]. » Kirchhoff était le seul professeur de Berlin avec lequel Boltzmann réussit à s'accorder sur le plan des relations humaines.

Boltzmann est de retour à Graz en 1876, cette fois comme professeur de physique expérimentale. Son enseignement déborde manifestement le cadre local : Nernst et Arrhenius y sont ses élèves. Il demeure à Graz une quinzaine d'années qui furent les plus heureuses de sa vie. C'est là qu'il se maria et fonda une famille qui devait compter cinq enfants [2]. Il y devient successivement doyen de la Faculté de philosophie et recteur de l'Université.

Boltzmann se vit offrir, en 1888, la succession de Kirchhoff à Berlin ; mais craignant, en Allemand du Sud qu'il était, de ne pouvoir s'y acclimater, il refusa. « Certains collègues pensaient qu'il aurait bien mieux valu ne pas décliner cette offre. Sans aucun doute, du moins pour mon enseignement oral ; mais chacun peut, quand il œuvre avec tant soit peu d'audace et d'idéal, acquérir un poids tout à fait significatif par des appels et des découvertes... Un petit rouage, qui travaille toujours correctement à la bonne place, peut produire beaucoup [3]. »

Boltzmann accepta, en revanche, la chaire de physique théorique qui lui était offerte en 1890 à Munich, où professaient les mathématiciens Dyk et Pringsheim, le physicien Linde, le chimiste Bayer. Là, son auditoire s'élargit et les étudiants étrangers accourent d'Angleterre, des Etats-Unis et même du Japon.

En 1894, Boltzmann revient à Vienne dans la chaire de physique

[1] Cité par Jäger, [1].

[2] Boltzmann possédait aux environs de la ville une petite ferme, dont il surveillait personnellement l'exploitation. La chronique rapporte qu'il y ramena lui-même, à travers les rues de Graz, une vache qu'il venait d'acheter, non sans avoir consulté son collègue de zoologie sur la meilleure façon de la traire.

[3] Cité par Jäger, [1].

que la disparition de Stefan avait laissée vacante, après un court séjour à l'Université de Leipzig (1900-1902), Boltzmann rejoint sa ville natale dans la chaire de *Naturphilosophie* qu'avait occupée Ernst Mach.

Telle fut la carrière itinérante de Boltzmann.

Son enseignement s'étendit à toutes les branches de la physique et de la mécanique, et aussi aux mathématiques pures : thermodynamique et théorie cinétique des gaz, électromagnétisme, optique, acoustique, capillarité, mécanique analytique, élasticité, hydrodynamique, théorie des nombres, calcul différentiel et intégral, analyse supérieure, géométrie analytique, théorie des fonctions, sans parler de la philosophie des sciences.

Les témoignages sont unanimes à souligner l'extraordinaire succès des leçons magistrales de Boltzmann. Au dire de Streintz, un de ses collègues de Graz, « *Boltzmann war der geborene akademische Lehrer* [1] ». Stefan Mayer note que rarement autant de science s'est trouvée alliée à de si extraordinaires capacités pédagogiques. Sa vivacité captivait l'auditoire, il se montrait souvent espiègle et parfois mordant. Ehrenfest, qui devait plus tard contribuer à élucider la logique du théorème H, citait pour les avoir entendues les leçons de son maître avec une telle précision que Boltzmann pouvait s'écrier : « Si seulement je connaissais aussi bien mes travaux [2] ! » Le débat dramatique qui en 1895, à Lübeck, à propos de l'énergétique, opposa Boltzmann, soutenu par Félix Klein, à Helm, Ostwald et Mach devait laisser à Sommerfeld le souvenir d'une véritable corrida [3].

La renommée de Boltzmann devait dépasser les limites des pays germaniques, où ce prophète de l'atomisme n'était guère suivi. Son succès fut beaucoup plus vif auprès de l'école anglaise, où le goût des modèles mécaniques était prédominant. Boltzmann était en correspondance suivie avec Maxwell, Lord Kelvin, Lord Rayleigh, Bryan, etc. C'est le grand physicien hollandais Lorentz qui devait se charger, devant la Société allemande de physique, de prononcer l'éloge de Boltzmann et de retracer les grandes lignes de son œuvre (cf. Lorentz, [4]). En dehors des académies allemandes et autrichienne, Boltzmann fut membre ou associé de très nombreuses académies étrangères dont Paris, Londres, New York, Saint-Pétersbourg, Rome, Amsterdam, Upsal.

Boltzmann était d'une nature sensible et facile à blesser. En dépit des hautes satisfactions qu'il trouvait dans la recherche et des joies qu'il

[1] Broda, [1], p. 11.
[2] *Ibid.*
[3] Cf. Sommerfeld, *Wiener Chem. Zeitung*, vol. 47, p. 25, 1944. Cité par Broda, [1], p. 12.

devait à son tempérament d'artiste et de poète [1], en dépit d'un optimisme foncier, il était d'humeur changeante et sujet à de fréquentes dépressions [2]. Il s'isolait souvent dans le silence, évitant le contact des hommes au point qu'Ostwald avait pu le voir, à Leipzig, atteint d'une véritable « *Kollegangst* ». La tâche qu'il s'était assignée avait épuisé ses forces ; craignant de voir diminuer son activité créatrice, et souffrant des affres de l'*angina pectoris*, il mit fin à ses jours le 5 septembre 1906 à Duino, près de Trieste.

Il est à peu près certain que l'indifférence, l'hostilité même, que son œuvre avait rencontrée ait joué un rôle dans cette fin tragique. En ses dernières années, Boltzmann avait eu tendance à délaisser la science pour se sublimer dans la philosophie.

Engagé, Boltzmann l'était certes, mais cela ne l'empêchait pas d'être profondément convaincu de la nécessité d'aborder les problèmes sous les aspects les plus différents, et il a cruellement souffert de se voir incompris, sinon rejeté par l'école officielle qui régnait alors dans l'espace allemand. Au cours des années 90, il confiait à un de ses amis intimes, le compositeur Kienzl, son regret de voir qu'il n'était suivi de personne dans ses pensées les plus hautes. Helmholtz était le seul avec lequel il aurait pu discuter de certains problèmes, mais il vivait loin de lui.

On trouve la marque de découragement — tempéré cependant par l'espoir de voir germer un jour le grain qu'il avait semé — dans la préface et dans certains commentaires de la *Gastheorie* :

La théorie des gaz est pour ainsi dire passée de mode en Allemagne, notait Boltzmann en 1895. Et, trois ans plus tard : « Les attaques contre la théorie des gaz se multipliaient [lors de l'impression de la première partie de mon traité]. J'ai maintenant la conviction qu'elles reposent sur des malentendus et que le rôle de la théorie des gaz dans la science est loin d'être terminé. » Et, après avoir invoqué les résultats de Van der Waals, Ramsay et Smoluchowski, il ajoutait : « Ce serait, à mon avis, dommage pour la science, que la théorie des gaz tombât momentanément dans l'oubli, par suite de l'hostilité générale à laquelle elle est actuellement en butte, de même qu'autrefois l'autorité de Newton fit succomber pendant quelque temps la théorie des ondulations.

[1] Ses *Populäre Schriften* sont dédiées aux mânes de Schiller ; il avait emprunté au Faust de Gœthe les *mottos* de ses premiers livres. « Je me suis révélé en Schiller, affirmait Boltzmann ; sans lui j'aurais pu être un homme avec le même nez et la même barbe, mais je n'aurais jamais pu me donner. Seul Beethoven a eu sur moi une influence du même ordre. » (Cité par Jäger, [1].)

[2] Boltzmann attribuait lui-même plaisamment ces sautes d'humeur qui le faisaient passer brusquement de la joie à la tristesse au fait qu'il était né, au son d'un bal, dans la nuit du mardi gras au mercredi des Cendres.

« Je sais combien, quand on est isolé, on demeure impuissant à lutter contre les courants de son temps. Pourtant, j'ai voulu contribuer, dans la mesure de mes forces, à ce qu'on n'ait pas trop de choses à redécouvrir, quand on reviendra à la théorie des gaz[1]. »

Au début de son traité, Boltzmann se demande : « Qui sait même si, un jour, on ne considérera pas comme un pas en arrière la tendance moderne [c'est-à-dire la tendance énergétique] ; car l'histoire des sciences nous montre que bien souvent on a reconnu comme fausses des généralisations faites pour élargir les connaissances théoriques. Qui peut voir dans l'avenir ? Que tous les chemins soient donc libres, et arrière toute dogmatique pour ou contre les idées atomistiques[2] ! »

Ce que réclamait Boltzmann, devant les exclusives dont il avait tant souffert, c'était essentiellement la liberté de pensée et d'expression du chercheur et cela en faveur même du progrès de la science :

« Il n'est jamais venu à l'idée de personne d'exiger, pour l'amour de la théorie moléculaire, qu'elle soit universellement imposée. Mais aussi il est bon d'éviter l'autre opinion extrême, le dogme de la sacro-sainte phénoménologie... A côté de la Thermodynamique générale, et sans en diminuer l'importance que l'on ne doit jamais chercher à restreindre, il est également indispensable, pour approfondir notre connaissance de la nature, de développer les images mécaniques et de les rendre palpables : et cela non pas malgré le fait qu'elles ne sont pas recouvertes de toutes pièces par la Thermodynamique générale, et qu'elles offrent des perspectives sur des horizons nouveaux, mais précisément à cause de ce fait[3]. » L'avenir devait donner raison à Boltzmann en ce sens que la physique ne réussit essentiellement à progresser, dans le domaine quantique et atomique, qu'en écartant les interdits qui avaient été semés sous ses pas.

Boltzmann lui-même semble avoir porté peu d'attention à l'évolution qui devait dessiller les yeux de Mach et d'Ostwald et les convaincre de ce qu'on appelait alors la réalité moléculaire.

Ce désintéressement relatif, où l'on peut voir un aspect complémentaire du drame boltzmannien, est attribuable à la lutte même qui avait épuisé ses forces et l'avait incité à se retirer sur l'Aventin philosophique.

Boltzmann devait survivre dix ans à la découverte de la radioactivité, et six ans à la première théorie des quanta. Il aurait pu à l'extrême limite prendre connaissance et tirer argument de la théorie einsteinienne du mouvement brownien en faveur de la réalité moléculaire, apercevoir dans la relativité restreinte cette domination par l'électromagnétisme du

[1] [2], II, pp. VII-VIII.
[2] *Ibid.*, I, p. 4.
[3] *Ibid.*, II, pp. 250-251.

domaine de la mécanique dont il avait lui-même entrevu la possibilité, et trouver dans l'existence des quanta de lumière une des confirmations les plus inattendues de sa conception probabiliste de l'entropie. Mais, retiré de la course, ce grand novateur demeurait un homme du XIXe siècle, pour lequel le débat entre atomistique et phénoménologie macroscopique demeurait affaire de choix théorique.

Le royaume de la pensée boltzmannienne devait être de ce monde, mais il ne fut pas de son temps [1].

[1] Ce n'est qu'en 1933 que fut élevé à Vienne un monument consacré à la mémoire de Boltzmann. On devait y graver la formule célèbre $S = k \log W$. Cette loi, où se révèle la simplicité de son génie, appelle la question même que se posait Boltzmann devant les formules de Maxwell : « *War es ein Gott, der diese Zeichen trieb ?* » (Cf. Broda, [1], p. 28.)

SECONDE PARTIE

MÉTHODE ET DIALECTIQUE DE BOLTZMANN

Avant-propos

Il nous faut maintenant pénétrer de façon plus intime dans la méthode et la dialectique de Boltzmann, en le voyant à l'œuvre à la fois dans sa pensée créatrice et dans la défense de ses idées, où il excellait.

Ne pouvant, dans le cadre restreint de cette étude, considérer l'ensemble de son œuvre, nous avons fait choix, essentiellement, du thème de l'interprétation mécanique du second principe de la thermodynamique.

Pour l'intelligence de ce sujet, nous rappellerons tout d'abord brièvement, en nous aidant du seul *digest* que Boltzmann ait jamais écrit, le chemin qu'il a suivi pour parvenir au théorème H à partir de la loi de répartition des vitesses de Maxwell.

Incidemment, nous indiquerons comment Boltzmann a mis en œuvre, sous sa forme la plus générale, le théorème de Liouville.

Nous analyserons ensuite la première interprétation mécanique du second principe donnée par Boltzmann dès 1866, c'est-à-dire au début même de ses recherches sur la théorie cinétique.

Il va de soi qu'aussitôt obtenu le théorème H, c'est-à-dire dès 1872, Boltzmann en avait aperçu le lien étroit avec le second principe. Mais ce sont les objections mêmes faites à la théorie cinétique — et essentiellement l'objection de réversibilité — qui ont servi de levier à Boltzmann dans l'élaboration de l'interprétation probabiliste de l'entropie : premier exemple de sa dialectique.

Nous examinerons donc l'ensemble des objections de Loschmidt, lesquelles sont caractéristiques de l'opposition rencontrée par Boltzmann, de la part même d'un des rares atomistes de l'époque, et le cheminement précis qui a conduit Boltzmann à son mémoire fondamental de 1877 sur le second principe. Ce mémoire, qui constitue l'un des sommets essentiels de l'œuvre de Boltzmann, et où apparaît clairement le jeu de son intuition finitiste, nous offrira le meilleur exemple que l'on puisse donner de sa méthode.

Nous verrons ensuite Boltzmann aux prises avec les critiques de l'école anglaise et avec l'objection Zermelo (1896), ce qui nous révélera un second et remarquable exemple de sa dialectique.

Cette analyse, pour partielle qu'elle soit, nous révélera de façon beaucoup plus directe la pensée de Boltzmann que la synthèse de la *Gastheorie*, ouvrage touffu et dont le plan est loin d'être parfait, et où les apports personnels de l'auteur ne sauraient apparaître avec la même spontanéité et la même clarté que dans les mémoires originaux, que nous nous efforcerons de suivre aussi fidèlement que possible. La méthode historique reprend ici tous ses droits, quand il s'agit de pénétrer dans une œuvre aussi complexe et aussi difficile [1].

[1] Puisse le lecteur être payé de ses peines ou, comme l'écrivait Jäger en soulignant, dans sa biographie de Boltzmann, l'extrême difficulté de cette œuvre, sous une forme trop poétique pour que je me hasarde à la traduire : « *Wer die Dornenhecke durchquert hat wird Dornröschen küssen.* »

CHAPITRE PREMIER

De la loi de répartition des vitesses de Maxwell au théorème H de Boltzmann

La loi de répartition des vitesses de Maxwell a été le point de départ des recherches de Boltzmann sur la théorie cinétique des gaz.

Dans une première démonstration de cette loi [1], Maxwell admettait tout d'abord qu'un gaz se comporte de la même manière à l'égard de toutes les directions de l'espace — ce qui de toute évidence négligeait la pesanteur ou tout champ de force analogue — en sorte que toutes les directions sont également probables pour la vitesse d'une molécule.

Appelant ξ, η, ζ les composantes de la vitesse d'une molécule, Maxwell admettait encore l'entière indépendance des probabilités de chacune de ces trois composantes.

Dans ces conditions, le nombre par unité de volume des molécules dont les centres possèdent une vitesse caractérisée par les limites infiniment voisines

$$\xi \text{ et } \xi + d\xi, \qquad \eta \text{ et } \eta + d\eta, \qquad \zeta \text{ et } \zeta + d\zeta$$

doit être de la forme

$$f(\xi)\, f(\eta)\, f(\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Et comme, par hypothèse, le nombre de ces molécules ne dépend que de la grandeur et non de la direction de la vitesse, le produit $f(\xi)\, f(\eta)\, f(\zeta)$ ne peut être fonction que de $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. D'où, pour chaque composante de la vitesse, la loi

$$f(\xi) = ae^{b\xi^2},$$

la constante b devant être négative pour que le nombre des molécules soit fini.

[1] *Phil. Mag.*, vol. 19, 1860, p. 22, et *Scientific papers*, vol. I, p. 380, [5].

Maxwell lui-même s'était convaincu[1] de l'insuffisance de cette démonstration, qui devait cependant devenir rapidement classique en raison même de sa simplicité.

Cette autocritique a échappé à beaucoup d'auteurs qui semblent avoir ignoré les efforts de Maxwell pour préciser cette démonstration.

Dans une seconde démonstration[2], Maxwell considère les molécules comme des sphères parfaitement élastiques ou comme des points matériels exerçant entre eux des actions portées par les droites qui les joignent, fonction de la seule distance et n'ayant de valeurs sensibles que pour de très petites distances.

Soit, dans un gaz homogène en équilibre thermique

$$f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

le nombre par unité de volume des molécules dont les centres possèdent une vitesse de composantes ξ, η, ζ comprises entre les limites

$$(1) \qquad \xi \text{ et } \xi + d\xi, \qquad \eta \text{ et } \eta + d\eta, \qquad \zeta \text{ et } \zeta + d\zeta.$$

On recherche le nombre $d\nu$ de chocs (ou d'interactions) que ces molécules auront pendant le temps δt avec d'autres molécules dont la vitesse avant le choc est caractérisée par les limites

$$(2) \qquad \xi_1 \text{ et } \xi_1 + d\xi_1, \quad \eta_1 \text{ et } \eta_1 + d\eta_1, \quad \zeta_1 \text{ et } \zeta_1 + d\zeta_1.$$

On désigne par b la plus courte distance 00′ à laquelle passeraient l'une de l'autre deux molécules si elles se déplaçaient uniformément avec leurs vitesses absolues avant le choc, sans l'intervention d'une action réciproque, par V la vitesse relative de ces deux molécules, par ε l'angle de deux plans menés par cette vitesse relative, l'un parallèlement à 00′, l'autre parallèlement à une droite fixe (l'axe des x par exemple).

Par le centre de chacune des molécules (1) faisons passer un plan perpendiculaire à la vitesse relative V et construisons dans chacun de ces plans un anneau circulaire de rayons b et $b + db$ centré sur la molécule. Dans cet anneau, découpons le secteur défini par les angles au centre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ et enfin construisons le parallélépipède de hauteur $V\delta t$ et de base $b db d\varepsilon$.

[1] *Phil. Mag.*, vol. 35, 1868, p. 145, et *Scientific papers*, vol. II, p. 43, [8].
[2] [8], p. 186, et *Scientific papers*, vol. II, p. 44.

Le volume total des parallélépipèdes correspondant aux différentes molécules (1) sera :

$$\Pi = f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, b db d\varepsilon\, V \delta t.$$

Dans ce volume sont présentes

$$\Pi f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1,$$

molécules de la famille (2). On voit aisément que, pendant le temps δt, chacune de ces molécules s'approchera d'une molécule de la famille (1), en sorte que le nombre de chocs (ou d'interactions) sera :

$$d\nu = f(\xi, \eta, \zeta)\, f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, V b\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, db d\varepsilon\, \delta t.$$

Après le choc, les vitesses des molécules de chacune des familles (1) et (2) seront comprises respectivement entre les limites :

(1′) ξ' et $\xi' + d\xi'$, η' et $\eta' + d\eta'$, ζ' et $\zeta' + d\zeta'$,

(2′) ξ_1' et $\xi_1' + d\xi_1'$, η_1' et $\eta_1' + d\eta_1'$, ζ_1' et $\zeta_1' + d\zeta_1'$.

Si maintenant on renversait le sens de l'intervalle δt, le nombre des chocs entre les molécules ayant initialement les vitesses (1′) et (2′) et prenant après le choc les vitesses (1) et (2) serait :

$$d\nu' = f(\xi', \eta', \zeta')\, f(\xi_1', \eta_1', \zeta_1')\, V b d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'\, d\xi_1'\, d\eta_1'\, d\zeta_1'\, db d\varepsilon\, \delta t.$$

La répartition statistique des vitesses sera conservée s'il y a autant de *chocs inverses* que de *chocs directs*, c'est-à-dire si :

$$d\nu = d\nu'.$$

Entre les différentielles existe la relation :

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'\, d\xi_1'\, d\eta_1'\, d\zeta_1',$$

laquelle, comme Boltzmann devait l'observer [1], n'est qu'un cas particulier du théorème de Liouville.

La condition d'équilibre statistique se réduit alors à l'équation fonctionnelle

$$f(\xi, \eta, \zeta)\, f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = f(\xi', \eta', \zeta')\, f(\xi_1', \eta_1', \zeta_1') \tag{3}$$

ou, par abréviation :

$$f f_1 = f' f_1'.$$

[1] *Wiener Berichte*, vol. 58 [2], 1868, p. 517.

Si toutes les molécules sont de même nature et si, conformément à la première hypothèse de Maxwell, la fonction f ne dépend que de la grandeur de la vitesse, c'est-à-dire de $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$, quantité qui demeure invariante au cours d'un choc, l'équation fonctionnelle précédente se résout par

$$f(\xi,\eta,\zeta)=Ae^{-\frac{1}{a^2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Ainsi s'établit la loi de répartition des vitesses, sans qu'il soit nécessaire de supposer, comme Maxwell l'avait fait à l'origine, l'indépendance des probabilités des différentes composantes de la vitesse d'une molécule.

Boltzmann entreprend alors de rechercher sous quelles conditions l'état d'un gaz peut s'approcher de l'équilibre défini par la répartition de Maxwell et s'y maintenir pendant un temps très long.

On ne peut songer pour cela à suivre explicitement l'évolution des différentes molécules à partir de la donnée précise de leurs positions et de leurs vitesses initiales. Il est pratiquement nécessaire, pour aboutir à des formules utilisables, d'admettre que l'état du gaz est à l'instant initial inorganisé du point de vue moléculaire *(molekular ungeordnet)* et le demeure au cours du temps. Le volume total occupé par le gaz se laisse ainsi diviser en domaines élémentaires qui, tout en étant très petits devant les dimensions accessibles à l'observation, n'en contiennent pas moins chacun un grand nombre de molécules. Dans chaque domaine élémentaire ainsi considéré, les molécules possèdent les vitesses les plus variées tant en grandeur qu'en direction, en sorte que l'état du gaz est défini à chaque instant de façon suffisante par la connaissance d'une fonction de répartition $f(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)$ des positions et des vitesses des molécules.

Le produit $\quad f(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,dx\,dy\,dz\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$

exprime le nombre des molécules dont le centre est situé dans le domaine élémentaire compris entre les limites :

(4a) $\quad x$ et $x+dx$, y et $y+dy$, z et $z+dz$

et dont les composantes de la vitesse sont comprises entre les limites :

(4b) $\quad \xi$ et $\xi+d\xi$, η et $\eta+d\eta$, ζ et $\zeta+d\zeta$.

Les chocs successifs encourus par une même molécule doivent être considérés comme des événements indépendants pour qu'on puisse leur appliquer les règles du calcul des probabilités.

Boltzmann considère encore les molécules comme des sphères élastiques, ou comme des centres de force entre lesquels s'exercent des forces radiales fonction de la seule distance, mais il n'exclut pas l'existence de forces massiques extérieures, dont les composantes X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z.

Le problème est d'obtenir la variation avec le temps de la fonction de répartition f.

Cette fonction varie, en premier lieu, du fait que les molécules changent d'élément de volume en vertu de leur mouvement ; en second lieu, du fait du champ de force extérieur qui altère les composantes de la vitesse ; et enfin du fait des chocs. Au total :

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z}+X\frac{\partial f}{\partial \xi}+Y\frac{\partial f}{\partial \eta}+Z\frac{\partial f}{\partial \zeta} \tag{5}$$
$$=\int (f'f'_1-ff_1)\, V b\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, db\, d\varepsilon$$

avec les mêmes notations que précédemment. L'intégration s'étend à toutes les valeurs de ξ_1, η_1, ζ_1 de $-\infty$ à $+\infty$, aux valeurs de ε de 0 à 2π et à toutes les valeurs de b inférieures au rayon de la sphère d'action moléculaire.

Boltzmann démontre [1] que la fonction

$$H=\int f \log f\, dx\, dy\, dz\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

où l'intégration s'étend à toutes les valeurs possibles des variables, ne subit aucune modification du fait du mouvement de progression des molécules, ni du fait du champ extérieur, dès l'instant où le gaz est enfermé dans un récipient dont les parois sont immobiles et ne cèdent ni n'enlèvent aucune énergie cinétique aux molécules de gaz.

Dans ces conditions, la dérivée temporelle de la fonction H se réduit à :

$$\frac{dH}{dt}=\int \log f(f'f'_1-ff_1)\, V b\, dx\, dy\, dz\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1,$$

l'intégrale étant toujours étendue à toutes les valeurs possibles des variables.

En échangeant d'abord le rôle des molécules qui se choquent, et ensuite dans chacun des deux cas le commencement et la fin du choc,

[1] *Wiener Berichte*, vol. 66 [2], 1872, pp. 279-370. [27].

on obtient quatre expressions équivalentes, dont dH/dt est la moyenne arithmétique, savoir :

$$\frac{dH}{dt}=\frac{1}{4}\int[\log(ff_1)-\log(f'f'_1)](f'f'_1-ff_1)Vb\,dx\,dy\,dz\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\zeta_1\,db\,d\varepsilon.$$

Cette expression est essentiellement négative. *La grandeur* H *ne peut donc que décroître* et comme elle ne peut atteindre $-\infty$, elle doit s'approcher d'un minimum pour lequel

$$ff_1=f'f'_1$$

et qui correspond à l'équilibre statistique [1].

[1] Pour tout ce paragraphe, cf. [45].

Extension du théorème de Liouville à un système différentiel plus général que les équations canoniques de la dynamique

Boltzmann ne s'est pas contenté de mettre en œuvre systématiquement en mécanique statistique le théorème de Liouville. Il a étendu ce théorème à un système différentiel plus général que les équations canoniques de la dynamique, ouvrant ainsi une voie qui devait inspirer directement Einstein [1].

Tout en suivant rigoureusement Boltzmann, nous simplifions ici ses notations, sans diminuer en quoi que ce soit la généralité de sa démonstration [2].

Soit

$$\frac{\delta s_i}{\delta s} = \sigma_i \, (i = 1, 2 \ldots n), \tag{1}$$

un système différentiel du premier ordre. En vertu des équations (1), les fonctions s_i prennent une série de valeurs, fonctions de la variable indépendante s et dépendant en outre de leurs valeurs initiales S_i.

Considérons un ensemble de valeurs initiales prises à l'intérieur d'un domaine G entre les limites S_i et $S_i + dS_i$. Les valeurs des s_i relatives à la valeur s de la variable indépendante et correspondant à l'ensemble des valeurs initiales prises à l'intérieur du domaine G forment elles-mêmes un champ g.

Les valeurs s'_i relatives à la valeur $s + \delta s$ de la variable indépendante et correspondant au même ensemble de valeurs initiales forment à leur tour un champ g'.

On peut écrire :

$$\int_{g'} ds'_1 \, ds'_2 \ldots ds'_n = \int_g \mathrm{D} ds_1 \, ds_2 \ldots ds_n \neq \mathrm{D} \int_g ds_1 \, ds_2 \ldots ds_n$$

[1] Voir plus loin, page 261.
[2] [2], II, § 29, pp. 74-78.

en sortant du signe d'intégration dans le champ infiniment petit g le déterminant fonctionnel :

$$D = \frac{D(s'_1, s'_2 \ldots s'_n)}{D(s_1, s_2 \ldots s_n)}.$$

Or, en vertu de (1) :

$$s'_i = s_i + \sigma_i \cdot \delta s.$$

Au second ordre près le déterminant fonctionnel vaut donc :

$$D = 1 + \delta s \sum_1^n \frac{\partial \sigma_i}{\partial s_i}.$$

Et posant :

$$\tau = e^{\int \delta s \sum_1^n \frac{\partial \sigma_i}{\partial s_i}}.$$

$$D = 1 + \frac{\delta \tau}{\tau} = \frac{\tau'}{\tau}$$

en désignant par τ' la valeur de τ pour la valeur $s + \delta s$ de la variable indépendante. D'où :

$$\frac{1}{\tau'} \int_{g'} ds'_1 ds'_2 \ldots ds'_n = \frac{1}{\tau} \int_g ds_1 ds_2 \ldots ds_n.$$

Et, de proche en proche, en revenant aux valeurs initiales et en désignant par τ_0 la valeur initiale de τ :

$$\frac{1}{\tau} \int_g ds_1 ds_2 \ldots ds_n = \frac{1}{\tau_0} \int_G dS_1 dS_2 \ldots dS_n,$$

résultat qui généralise le théorème de Liouville.

CHAPITRE III

Première formulation, dans le cadre de la théorie cinétique, du second principe de la thermodynamique

Dès 1866, c'est-à-dire dès ses premiers travaux sur la théorie cinétique des gaz, Boltzmann s'attaque à l'interprétation mécanique du second principe de la thermodynamique [22].

Il s'agissait, de façon précise, de donner de ce principe, dans le cadre de la théorie cinétique, une démonstration purement analytique, et de trouver le théorème de mécanique qui lui correspond.

Boltzmann commence par préciser, en théorie cinétique, le concept de température, en partant du fait que deux ou plusieurs corps de même température, amenés en interaction *(Berührung)*, ne se communiquent aucune quantité de chaleur et partant aucune énergie cinétique du mouvement de leurs atomes. La température d'un atome s'exprime, dans ces conditions, par la moyenne temporelle de son énergie cinétique.

Partant alors de l'expression du second principe, sous la forme la plus générale que lui avait donnée Clausius, savoir

$$\int \frac{dQ}{T} \leq 0,$$

Boltzmann se borne ici aux *processus réversibles* (cas de l'égalité dans la relation ci-dessus). Il considère un corps dont la température et la pression sont maintenues constantes et dont par suite les atomes décrivent des trajectoires fermées, en sorte qu'un atome se retrouve dans les mêmes conditions (position et vitesse) aux instants t_1 et t_2. La température de cet atome s'exprime alors par la moyenne entre ces deux instants de son énergie cinétique :

$$T = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{mc^2}{2} dt}{t_2 - t_1},$$

où m désigne la masse et c la vitesse de cet atome.

On fournit alors à chaque atome une énergie cinétique ε, et cela de telle manière qu'*en moyenne* aucune fraction de cette énergie ne soit rétrocédée à d'autres atomes. La pression et la température du corps ne varient que d'une façon infinitésimale et chaque atome décrit une courbe infiniment voisine de sa trajectoire antérieure.

Chaque atome étant soumis à une force de composantes X, Y, Z, le *premier principe* fournit aussitôt l'équation :

$$\delta \frac{mc^2}{2} = \varepsilon + X\delta x + Y\delta y + Z\delta z - \varepsilon',$$

δ étant un symbole de variation et ε' étant la fraction de l'énergie ε qui serait rétrocédée à d'autres atomes. Mais comme, par hypothèse, ε' est nulle *en moyenne*, on peut écrire aussitôt, par intégration entre t_1 et t_2 :

$$\int_{t_1}^{2} \delta \frac{mc^2}{2} = \varepsilon (t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dt$$

$$= \varepsilon (t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} m (x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)\, dt.$$

Mais, en appelant s l'arc de trajectoire :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{mc^2}{2} dt = \delta \oint \frac{mc}{2} ds = \frac{m}{2} \oint \delta c ds + c\delta ds.$$

D'où :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{mc^2}{2} dt = \frac{\varepsilon (t_2 - t_1)}{2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} (x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)\, dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} (x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')\, dt = \frac{\varepsilon (t_2 - t_1)}{2} + \frac{m}{2} \Big| x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z \Big|_{t_1}^{t_2},$$

et comme, aux instants t_1 et t_2 l'atome a la même position et la même vitesse, le crochet s'évanouit et il reste :

$$\varepsilon = \frac{2\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{mc^2}{2}\, dt}{t_2 - t_1}$$

d'où, compte tenu de la valeur de T :

$$\frac{\varepsilon}{T} = 2\delta \log \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{mc^2}{2}\, dt \right].$$

Si le corps est à température uniforme, et que la même quantité de chaleur soit apportée à tous ses éléments, on a au total (en unités mécaniques) :

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \Sigma\varepsilon = 2\delta\, \Sigma \log \int_{t_1}^{t_2} \frac{mc^2}{2}\, dt.$$

Dans le cas contraire, on décompose le corps en autant de parties dk qu'il est nécessaire pour que température et chaleur fournie y soient pratiquement uniformes, ce qui donne :

$$\int \frac{\delta Q}{T}\, dk = 2\delta\Sigma \log \int_{t_1}^{t_2} \frac{mc^2}{2}\, dt.$$

Et l'intégrale selon δ, soit :

$$\boxed{\int\int \frac{\delta Q}{T}\, dk = 2\Sigma \log \int_{t_1}^{t_2} \frac{mc^2}{2}\, dt}$$

représente alors l'entropie au sens de Clausius, et s'évanouit entre les mêmes limites, lorsque la pression et la contre-pression sont constamment égales.

Si cette dernière condition n'était pas remplie, on pourrait à chaque instant rétablir cette égalité à l'aide de forces supplémentaires. En ce

cas, la quantité de chaleur qui doit être fournie au corps pour assurer les mêmes changements de volume et de température dans toutes ses parties doit satisfaire à l'égalité

$$\iint \frac{\delta Q}{T}\, dk = 0,$$

mais cette quantité est plus grande que celle qui est réellement apportée au corps, car elle doit vaincre en outre, en cas d'extension du corps, la pression des forces supplémentaires nécessairement positives. Donc la chaleur réellement apportée doit satisfaire non plus à l'égalité, mais à l'inégalité :

$$\iint \frac{\delta Q}{T}\, dk < 0.$$

Si les atomes ne décrivent pas des trajectoires fermées, on choisit la durée $t_2 - t_1$ assez grande pour avoir une véritable moyenne de l'énergie cinétique. En outre, eu égard au précédent calcul de variation, l'expression

$$x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z$$

devra avoir la même valeur aux instants t_1 et t_2. On peut, en particulier, choisir les extrémités s_1 et s_2 sur la trajectoire initiale de façon que le déplacement soit normal à la trajectoire, auquel cas l'expression ci-dessus est nulle aux instants t_1 et t_2. On obtient ainsi le même résultat que dans le cas des trajectoires fermées.

En conclusion, on peut faire correspondre au second principe de la thermodynamique un théorème de mécanique rationnelle ; un simple coup d'œil aux calculs précédents montre que ce théorème est une généralisation du principe de la moindre action, laquelle s'énonce ainsi :

« *Si un système de points, sous l'influence de forces satisfaisant au principe des forces vives, exécute des mouvements quelconques et qu'une même énergie cinétique infiniment petite soit communiquée à chacun de ces points ainsi obligés à se mouvoir sur des trajectoires infiniment voisines* (de leurs trajectoires primitives), *la quantité* $\delta\Sigma \frac{m}{2}\int c\,ds$ (où c est la vitesse d'un point du système) *est égale à l'énergie cinétique totale apportée au système, multipliée par la moitié de la durée du mouvement, sous réserve que la somme des produits scalaires du déplacement* ($\delta\overline{P}$) *et de la vitesse* ($\overline{c}$) *des différents points soit la même aux deux limites* [1]. »

[1] [22], pp. 30-31.

Ce théorème se réduit au principe de la moindre action si l'énergie cinétique apportée au système s'annule, ainsi que les variations aux limites.

Boltzmann a été le premier à formuler une semblable analogie mécanique du second principe.

Clausius lui-même devait s'y employer en 1870 [1], dans un mémoire dont les résultats sont identiques, à la forme près, à ceux que Boltzmann avait fait connaître à l'Académie des sciences de Vienne le 8 février 1866.

Boltzmann tint à établir sa priorité en l'espèce [2], tout en exprimant sa joie de voir une autorité telle que celle de Clausius contribuer à propager ses propres travaux.

[1] *Poggendorf Annalen*, vol. 142, 1870, p. 433, [10].
[2] Boltzmann, [23], p. 211.

Les objections de Loschmidt

Sous le titre unique *Über den Zustand des Wärmegleichgewichtes eines Systems von Körpern mit Rücksicht auf die Schwerkraft*, Loschmidt n'a pas consacré moins de quatre mémoires à la critique de la théorie cinétique [1]. De ses objections, une seule est demeurée célèbre et a exercé, comme nous aurons l'occasion de le constater, une influence déterminante sur la pensée de Boltzmann : c'est l'*objection de réversibilité*.

Il semble cependant qu'il soit utile d'étudier ici l'ensemble des thèses de Loschmidt à l'égard à la fois de la théorie cinétique et du second principe de la thermodynamique, ne serait-ce que pour montrer à quelle sorte d'opposition Boltzmann se heurtait même de la part d'un atomiste aussi convaincu que Loschmidt, pour lequel il avait beaucoup de respect et d'amitié. Une vingtaine d'années après les polémiques qui vont nous occuper, en prononçant l'éloge de Loschmidt et en rappelant comment les évaluations de la « grandeur des molécules » poursuivies par de nombreuses méthodes conduisaient toutes, sans aucune exception, à confirmer le nombre initialement calculé par Loschmidt en lui conférant une évidence confinant à la certitude, Boltzmann pouvait conclure :

« Nous devons nous dispenser de spéculations fantaisistes sur l'organisation précise des atomes, mais l'existence de certaines discontinuités dans la structure interne de la matière demeurera pour toujours un des faits les plus importants de la philosophie naturelle et c'est à notre Loschmidt seul que l'on doit l'une des plus grandes découvertes de la science, celle de l'ordre de grandeur des dimensions auxquelles sont liées ces discontinuités [2]. »

I. Dans son premier mémoire, Loschmidt s'attaque à la proposition, conséquence de la théorie cinétique, selon laquelle dans un système de corps dont les atomes sont soumis à des forces quelconques, tant inté-

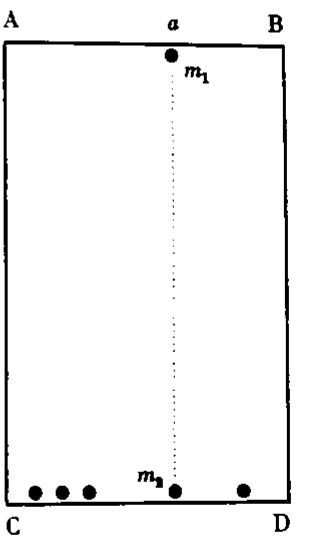
[1] Cf. Loschmidt, [1] à [4].
[2] [15].

rieures qu'extérieures, l'équilibre thermodynamique exige l'égalité de l'énergie cinétique moyenne de tous les atomes.

Pour obtenir des contre-exemples mettant en défaut cette proposition, Loschmidt s'emploie à construire des modèles de systèmes composés d'atomes pesants et alignés suivant une verticale, systèmes dont l'équilibre thermodynamique est compatible avec une inégalité des températures des différentes parties et avec l'existence d'un flux continu de chaleur. Cela en contradiction avec un théorème fondamental de thermodynamique, selon lequel il est impossible, en l'état d'équilibre thermodynamique, d'obtenir aucun travail de l'énergie cinétique.

« Ainsi, déclare Loschmidt, serait détruit le prestige terrifiant *(terroristische Nimbus)* qui donne au second principe de la thermodynamique l'apparence d'un principe de destruction de toute vie dans l'Univers, et ouverte la perspective consolante de voir l'humanité n'être pas limitée, dans la transformation de chaleur en travail, à l'intervention du charbon ou de la chaleur solaire, et avoir à sa disposition pour tous les temps une provision inépuisable de chaleur transformable [1]. »

De semblables modèles, avec alignement des atomes, ne sont concevables que pour des agrégats solides.



Abordant alors le cas des gaz, Loschmidt conteste l'application de la loi de répartition des vitesses de Maxwell, établie dans l'hypothèse de l'absence de forces extérieures et en particulier de la pesanteur, à une colonne d'air verticale, et partant de l'égalité des températures aux différentes hauteurs.

Il développe ensuite le modèle suivant, qui rend problématique cette égalité des températures.

Soient : dans un vase prismatique ABCD, n atomes simples, chacun de masse m. Les atomes se comportent comme des sphères élastiques et sont soumis à la pesanteur. Les parois du vase sont supposées parfaitement élastiques. A l'instant initial, un seul atome m_1 est en a contre la paroi supérieure AB, tandis que tous les autres reposent sans vitesse sur le plan CD. On laisse l'atome m_1 tomber sans vitesse initiale de la hauteur h, et on suppose qu'il vienne choquer l'atome m_2. L'énergie cinétique de m_1, soit mgh, se répartit alors entre m_1

[1] [1], p. 135.

et m_2, qui s'élèvent suivant des paraboles. Les deux atomes se réfléchissent sur les parois verticales et retombent sur le fond, où ils viennent choquer d'autres atomes et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les atomes soient mis en mouvement dans l'espace ABCD où leurs collisions se poursuivent. Au bout d'un certain temps s'établit l'équilibre dynamique avec égalisation de l'énergie cinétique moyenne des différents atomes.

Mais il est clair que pour la couche supérieure AB l'énergie cinétique moyenne devra être nulle. Car un atome ne peut s'élever jusque-là sans que tous les autres reposent sans vitesse au fond du vase. Il est très probable que si n est très grand devant l'unité, aucun atome ne pourra monter en AB. L'énergie cinétique moyenne sera nulle sur un autre plan horizontal de cote $z < h$.

On doit d'ailleurs, ajoute Loschmidt, se montrer réservé sur le fait que l'état dit stationnaire, une fois réalisé, doive se maintenir indéfiniment.

Si, dans l'exemple précédent, après avoir laissé s'écouler un temps τ suffisant pour que l'état stationnaire s'institue, nous renversons brusquement les vitesses de tous les atomes, nous resterions au début dans un état qui semblerait également avoir le caractère stationnaire. Cela serait vrai assez longtemps, mais graduellement l'état stationnaire se détériorerait pour ainsi dire et au bout du temps τ nous reviendrions infailliblement à notre état initial : un seul atome aurait absorbé l'énergie cinétique totale du système et l'aurait transformée en énergie potentielle, tandis que tous les autres atomes reposeraient au fond dans leur ancienne place.

Et, partant de ce modèle, Loschmidt conclut en toute généralité :

« Il est évident que, d'une façon tout à fait générale, dans tout système quel qu'il soit, le processus complet des événements doit se dérouler à rebours quand on renverse instantanément les vitesses de tous les éléments.

» Le célèbre problème consistant à transformer le passé en devenir trouve ainsi, sinon une solution, du moins une formulation simple en assignant à tous les atomes de l'Univers le renversement de leurs vitesses instantanées [1]. »

Nous reviendrons, avec Boltzmann, sur ce *paradoxe de réversibilité*. Poursuivons pour l'instant notre analyse.

II. Dans son second mémoire, Loschmidt note tout d'abord que l'on a tendu à élargir toujours davantage le champ d'application de la loi de répartition des vitesses de Maxwell, dans l'intention d'en faire une loi universelle, à l'exemple de celle de la gravitation :

« On a aspiré d'autant plus ardemment à cette généralisation que l'on a pu conduire exactement les démonstrations, sur la base de cette

[1] [1], p. 139.

loi, de la validité générale du second principe de la thermodynamique et de la doctrine de la constante dissipation de l'énergie, par laquelle la marche de l'Univers est menacée d'une mort certaine.

» A l'origine, cette loi n'a été démontrée par Maxwell que pour les gaz monoatomiques et en l'absence de forces extérieures. Dans ce domaine restreint, elle possède une irréfutable validité. Tout au plus pourrait-on soulever l'objection que la présence de l'éther pourrait exercer, dans une certaine mesure, une influence compensatrice en sorte que les vitesses s'écartant considérablement de la moyenne ne pourraient se développer entièrement. Mais fort heureusement la nécessité d'avoir égard à l'existence de l'éther ne s'est pas manifestée jusqu'ici dans l'édification de la théorie cinétique, ce qui permet de supposer que l'influence de l'éther ne peut être sensible sur la répartition des vitesses [1]. »

De même, l'influence de la pesanteur apparaît comme devant être absolument négligeable « dans la plupart des expériences que nous faisons sur les gaz dans nos cabinets de physique ».

Il en va tout autrement si nous voulons nous occuper de physique cosmique et étudier les circonstances atmosphériques.

Et Loschmidt se fait fort de démontrer que la loi de répartition de Maxwell tombe en défaut si l'on doit tenir compte des forces extérieures, et en particulier de la pesanteur.

Il part pour cela d'une démonstration de Burbury (*Nature*, N° 293, vol. 12, p. 107, [2]), qu'il commence par analyser avant d'entreprendre de la réfuter.

Burbury considère les molécules de gaz comme des sphères élastiques, sur lesquelles agissent des forces quelconques de direction verticale et désigne par $f(z)$ le potentiel de ces forces à la cote z au-dessus du fond du réservoir.

Si l'on suppose tout d'abord qu'aucun choc ne se produit entre les molécules, le nombre des molécules ayant, au fond du réservoir, une vitesse dont la composante verticale est égale à w sera :

$$Ce^{-w^2/k^2}.$$

Mais, pour chaque molécule, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle demeure constante à tout instant. Comme les composantes horizontales de la vitesse sont elles-mêmes constantes, la somme :

$$w^2 + f(z)$$

restera constante pour chaque molécule.

[1] [2], pp. 366-367.

Or, d'après la loi de répartition de Maxwell, le nombre des molécules ayant, toujours au fond du réservoir, une vitesse de composante verticale égale à $\sqrt{w^2+f(z)}$ sera :

$$Ce^{-\frac{[w^2+f(z)]}{k^2}} = e^{-f(z)/k^2}\,Ce^{-w^2/k^2}.$$

Par conséquent, le nombre des molécules ayant à la cote z un degré de vitesse verticale déterminé sera égal au nombre des molécules ayant au fond du réservoir le même degré de vitesse verticale, au coefficient $e^{-f(z)/k^2}$ près. Il en résulte que la moyenne de l'énergie cinétique est la même dans toutes les couches horizontales et que seule la densité change avec la hauteur selon la proportion :

$$e^{-f(z)/k^2}.$$

Si l'on admet d'autre part que les vitesses selon les deux directions horizontales Ox et Oy étaient initialement réparties selon la loi de Maxwell, cette même répartition se maintiendra indéfiniment, aucune tendance des forces extérieures n'intervenant pour la modifier.

Mais d'autre part Maxwell a montré que les chocs entre les molécules n'ont aucune tendance à perturber une telle répartition. Burbury s'estime donc fondé à conclure que cette répartition doit aussi se maintenir sous l'influence combinée des chocs moléculaires et de forces extérieures quelconques.

Cela dit, voici la réfutation de Loschmidt [1].

Laissons entrer, par le fond d'un réservoir prismatique dont la section droite est prise égale à l'unité, et cela à chaque instant élémentaire dt, un assez grand nombre N de molécules dont les vitesses soient réparties conformément à la loi de Maxwell. Ces molécules, sous l'influence de la pesanteur, décriront des paraboles. Nous supposons encore que ces molécules se laissent parfaitement traverser les unes les autres, c'est-à-dire que nous excluons les chocs, en admettant simplement les réflexions des molécules sur les parois du réservoir. Dans ces conditions :

$$N_0 = Ae^{-(u^2+v^2+w^2+2gz)/k^2}\,du\,dv\,dw\,dz$$

représentera la partie des N molécules dont les composantes de la vitesse sont comprises entre les limites

$$u \text{ et } u+du, \qquad v \text{ et } v+dv, \qquad \sqrt{w^2+2gz} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{w^2+2gz}+dw$$

[1] Lequel, par raison de simplicité, ne considère que la seule pesanteur comme force extérieure.

et qui se trouvent dans une couche d'épaisseur dz immédiatement au-dessus du fond du réservoir.

En désignant par C la grandeur constante :

$$Ae^{-(u^2+v^2)/k^2}\,du\,dv\,dz,$$

il vient :

$$N_0 = Ce^{-(w^2+2gz)/k^2}.$$

Ces N_0 molécules qui, au bout du temps t, parviennent toutes à une couche plus élevée de hauteur z, y possèdent l'énergie cinétique $u^2+v^2+w^2$.

Or, selon la loi de Maxwell, le nombre des molécules possédant cette énergie cinétique devrait être donné par l'expression Ce^{-w^2/k^2}. Nous avons trouvé au contraire :

$$N_z = N_0 = Ce^{-(w^2+2gz)/k^2}.$$

Mais nous pouvons écrire cette dernière expression

$$e^{-2gz/k^2}\,Ce^{-w^2/k^2}$$

et cette forme s'accorde avec la première, au facteur e^{-2gz/k^2} près qui multiplie C. Il semble donc que l'on doive interpréter le processus en disant que le mouvement vers le haut des molécules de gaz n'a pas affecté la température, mais seulement la densité du gaz.

Jusqu'ici, Loschmidt semble se borner à répéter, à la forme près, le raisonnement de Burbury. Mais en fait il refuse de s'abandonner au courant statistique de la théorie cinétique et, comme nous l'allons voir, il s'efforce de discuter le sort des molécules individuelles au cours du processus de leur immission dans le réservoir, à l'aide de raisonnements de mécanique ordinaire — comme d'autres physiciens cherchaient à toucher l'éther du doigt.

En effet, poursuit Loschmidt, il doit s'écouler un temps déterminé t avant que tous les degrés de vitesse soient représentés dans la couche z. Ce n'est qu'au bout du temps défini par :

$$z = \frac{1}{2}gt^2$$

que la couche z sera atteinte par des molécules qui y auront une vitesse de composante verticale négligeable.

Pour toutes les couches horizontales au-dessus de z, la répartition de Maxwell ne peut avoir lieu, parce que les molécules de faible vitesse verticale y font défaut. Il est plus significatif encore que la répartition

de Maxwell ne peut être satisfaite à l'instant t pour les couches au-dessous de z. Car cela supposerait la disparition de toute molécule au moment où s'annule la composante verticale de sa vitesse. Au lieu de cela, ces molécules renversent alors leur mouvement vertical et viennent perturber la répartition des vitesses : car, à elles seules, les molécules qui montent satisfont à la loi de Maxwell ; celles qui descendent devraient en faire autant, mais les molécules à grande vitesse verticale manquent parmi elles.

A chaque instant, il n'y a donc qu'une seule couche horizontale où la répartition de Maxwell puisse être satisfaite : *première objection* à la démonstration de Burbury.

Loschmidt se demande alors ce qui se passerait si on limitait supérieurement le réservoir par un plan horizontal.

Considérons seulement les molécules qui parviennent à la paroi supérieure du réservoir situé à la hauteur z_1 au-dessus du fond. Soit T le temps qu'une molécule donnée met à accomplir la montée complète de 0 à z_1 et τ la fraction de T utilisée pour traverser la couche dz à la hauteur z ; $\frac{\tau}{T}$ est le facteur de densité avec laquelle cette molécule intervient dans la couche ; c'est-à-dire que si n est le nombre des molécules dont l'état initial à l'entrée dans le réservoir est caractérisé par l'énergie cinétique

$$u^2 + v^2 + (w^2 + 2gz),$$

il y en aura à chaque instant $n \frac{\tau}{T}$ dans la couche dz à la hauteur z, avec $\tau = \frac{dz}{w}$.

Au contraire, dans la couche la plus basse, il y a $n \frac{\tau_0}{T}$ molécules avec

$$\tau_0 = \frac{dz}{\sqrt{w^2 + 2gz}}.$$

Si dans les deux couches la même température devait régner et que la densité seule fût différente, le quotient

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\sqrt{w^2 + 2gz}}{w}$$

devrait se réduire à une pure fonction de z et ne plus contenir w. Le fait que cette condition ne peut être remplie constitue une *seconde objection* à l'égard de la généralisation de la loi de Maxwell.

Il y a encore, déclare Loschmidt, une *troisième objection*. En effet, supposons que l'on introduise les molécules non plus par le fond du

réservoir, mais par la paroi supérieure. En ce cas, les degrés de vitesse verticale les plus faibles disparaissent en proportion toujours plus grande au fur et à mesure que l'on atteint des couches de plus en plus profondes, et il en résulte une perturbation évidente dans la répartition des vitesses. Inversement, dans l'immission par le fond du réservoir, une perturbation analogue se produit par la disparition graduelle des degrés de vitesse les plus élevés lorsque l'on considère des couches de plus en plus hautes. Il n'est donc pas permis, conclut Loschmidt, d'avancer que le facteur e^{-2gs/k^2} n'affecte que la densité et de contester l'influence de ce facteur sur la répartition des vitesses.

III. Au début de son troisième mémoire, Loschmidt rappelle que, de différents côtés, l'on a pu soutenir l'opinion que, même en l'état d'équilibre thermique, l'égalité des températures de toutes les couches d'un gaz soumis à la gravitation ne saurait être vérifiée à la limite de l'atmosphère d'un corps céleste. En effet, à cette limite, les composantes normales de la vitesse sont nécessairement nulles et comme, selon la loi de répartition de Maxwell, les valeurs moyennes des différentes composantes de la vitesse sont égales en un point, la vitesse totale de progression des molécules doit également s'évanouir et par suite la température absolue du gaz s'approcher de zéro.

A cela, les tenants de la théorie cinétique ont pu opposer qu'en vertu même des principes qu'ils admettent, il ne peut y avoir de limite à l'atmosphère d'un corps céleste : en effet, parmi les différents degrés de vitesse des molécules d'un gaz, il en est de si grands que les molécules correspondantes échappent à l'attraction du corps considéré et doivent passer dans l'atmosphère d'un autre corps. Il n'y aurait donc aucun vide interplanétaire ni interstellaire, mais seulement des espaces où la raréfaction de l'atmosphère est considérable.

C'est devant l'impossibilité de répondre à ce dernier argument que Loschmidt avait cru devoir développer les constructions de son premier mémoire. Mais on a pu juger que ces constructions n'étaient pas opposables à la théorie cinétique, laquelle n'est valable en toute rigueur que pour des systèmes composés d'un très grand nombre de molécules.

Loschmidt entend ici modifier son modèle de façon à permettre à celui-ci d'englober un nombre arbitrairement grand de molécules. Il admet que la loi d'interaction entre deux molécules est de la forme k/r^n, où r est leur distance mutuelle. Si n est infiniment grand et $k > 0$, on obtient les lois du choc de deux sphères élastiques. Si au contraire k est négatif, n restant infiniment grand, on obtient la possibilité pour les molécules de se traverser mutuellement sans résistance [1].

[1] Nous rectifions ici une erreur évidente de l'original de Loschmidt sur le signe de k.

Laissons entrer dans un réservoir prismatique un très grand nombre de molécules de gaz, supposées soumises à la gravité. Nous admettons que la loi des actions mutuelles entre les molécules est celle du choc des sphères élastiques, et que leurs réflexions sur les parois du réservoir ont également lieu suivant cette même loi. La hauteur du réservoir devra dépendre de l'énergie cinétique totale des molécules qui y sont renfermées, en sorte que la chute libre d'une seule molécule depuis le haut jusqu'au fond fournisse une énergie cinétique égale à cette énergie totale. Dans un tel système, il doit y avoir une frontière supérieure à laquelle les molécules peuvent parvenir et l'énergie cinétique de leur mouvement de progression doit y être infiniment petite.

Laissons maintenant un second parti de molécules pénétrer dans le réservoir, leur nombre, leur loi d'action mutuelle ainsi que leur énergie cinétique totale étant arrangés de la même manière que dans le premier parti. Mais entre les molécules des deux partis différents devra s'appliquer la loi d'action k/r^n avec k négatif et n infiniment grand, en sorte que les molécules des deux partis puissent se traverser sans résistance.

Nous introduisons successivement dans le réservoir un troisième, un quatrième parti, etc., et cela sous les mêmes conditions, en continuant jusqu'à atteindre la densité voulue.

Dans le réservoir, il y aura donc des chocs entre les molécules appartenant à un même parti, tandis que les molécules de partis différents ne s'influenceront pas. Il y aura encore une limite supérieure où régnera une température infiniment petite, sans que la raréfaction elle-même doive dépasser toute mesure.

« Cette construction, déclare Loschmidt, est essentiellement dirigée contre l'assertion de la théorie des gaz suivant laquelle il y aurait égalité de température dans toutes les couches d'une colonne de gaz soumise à des forces extérieures, à titre de théorème de pure mécanique, lequel devrait être valable pour toutes les lois imaginables d'action [1]. »

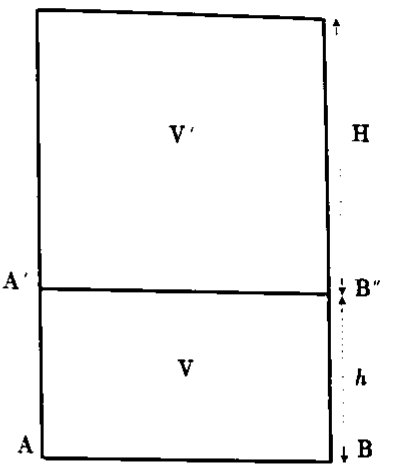
Et Loschmidt se propose de montrer que dans un cas qui approche de la réalité cette prétendue égalité de température ne peut avoir lieu.

Il considère dans ce but un récipient prismatique ABA'B' de volume V et de hauteur h, qui soit rempli d'air atmosphérique de densité arbitraire. Soit $E = \sum \frac{mv^2}{2}$ la somme des énergies cinétiques du mouvement de progression de toutes les molécules à un instant donné. Si le gaz est pesant, on doit encore considérer le travail qu'il est nécessaire de fournir à chaque molécule pour l'élever du fond du réservoir jusqu'à la hauteur où elle

[1] [3], p. 290.

se trouve à l'instant considéré. Désignons par L la somme de ces travaux.

Augmentons maintenant brusquement le volume du réservoir de la quantité V′ en sorte que les molécules remplissent le volume V+V′. La hauteur H du volume V′ sera telle qu'une molécule unique, tombant de la hauteur H + h parvienne au fond avec une énergie cinétique égale à la somme globale E + L. Les considérations déjà développées s'appliquent à la température à la frontière supérieure. On objectera sans doute qu'après une telle extension le gaz sera dans un tel état de raréfaction que la théorie cinétique ne s'applique plus, car celle-ci exige que, dans le plus petit volume élémentaire il y ait encore un nombre suffisant de molécules pour que l'on puisse parler de leur énergie cinétique moyenne à un instant donné. « Il suffit de prendre la hauteur initiale h du réservoir suffisamment grande, par exemple 12 milles géographiques, auquel cas une augmentation H aussi considérable du réservoir vers le haut n'entraînerait aucune raréfaction particulière dans les couches inférieures. Assurément, il se produirait dans les régions supérieures de V et plus encore de V′ une raréfaction extrême, mais seulement comme il s'en rencontre dans les régions supérieures de l'atmosphère et au moins dans l'espace interplanétaire. *Et une théorie qui émet des prétentions si affirmées à la généralité devrait s'organiser pour comprendre aussi de semblables états réels*[1]. »



Ici, soit dit en passant, apparaît la fermeté, pour ne pas dire la violence, de l'opposition de Loschmidt.

Si donc z_0 désigne la plus grande hauteur à laquelle parvient une molécule, dont la composante verticale de la vitesse est nulle, cette molécule retombe pendant l'instant suivant très court τ d'une distance très faible Δz et acquiert ainsi l'énergie cinétique $mg\Delta z$. Comme elle possède en général encore une composante u_0 de la vitesse, elle décrit pendant le temps τ un petit arc de parabole $\alpha\beta$. Si la même température devait régner dans toute la masse de gaz, on devrait avoir en moyenne :

$$mg\Delta z + m\frac{u_0^2}{2} = a,$$

[1] [3], p. 291.

avait choisi, au lieu de l'eau dont la chaleur spécifique est très grande par rapport à celle de toutes les autres substances, un autre corps comme constituant moyen de la masse solaire, il aurait trouvé une température beaucoup plus élevée. Par exemple, en choisissant la silice ou la chaux, dont la chaleur spécifique est d'environ 0,2, une température de 140 000 000° C. L'accord approché de ces valeurs parle en faveur d'une périodicité dans l'histoire du système solaire. Dans la première partie de sa période cosmique, le corps figé et obscur absorbe de la chaleur à partir du réservoir constitué par l'Univers et élève de ce fait graduellement la température de ses parties les plus profondes au-delà de toute mesure. Il arrive alors un moment où l'enveloppe extérieure rigide ne peut plus résister à la pression croissante des masses de gaz qui y sont enfermées. Il doit alors se produire une catastrophe explosive. La plus grande partie de la masse libérée sous forme de gaz se disperse dans un grand espace, et de ce fait la plus grande partie de la chaleur accumulée est transformée en travail de la gravitation et en énergie cinétique du mouvement de rotation visible de la masse ainsi dispersée.

Et alors commence la seconde partie de la période solaire, dont le processus de condensation de nébuleuses cosmiques et de lent refroidissement ultérieur des corps célestes ainsi formés a été si souvent, depuis Laplace, un objet de spéculation.

Dans ce qui précède, nous avons essayé de décrire le déroulement typique d'une période cosmique, si celle-ci parvenait à se développer entièrement conformément aux lois de la chaleur. Mais il est infiniment probable qu'un tel développement complet ne peut se réaliser que très exceptionnellement dans un système solaire, dès l'instant où la durée de l'absorption trouvera dans la plupart des cas une fin prématurée, du fait de l'impossibilité, pour l'enveloppe rigide, de résister à l'énorme pression de la masse de gaz que supposerait l'établissement du maximum de température. Sur notre Soleil, par exemple, en l'état d'équilibre thermique, il régnerait à la surface une température de —140° C, tandis que nous obtiendrions à l'intérieur, à une profondeur d'un demi-mille, une température de 3 000° C. Selon notre expérience quotidienne, la plupart des substances connues entrant dans la composition de notre système seraient alors comme un fleuve de feu. Nous ne pouvons cependant compter que sur une enveloppe d'un demi-mille d'épaisseur au plus. Il est évident que le processus ne pourra dans ce cas atteindre ce stade et qu'une éruption préalable viendra abréger l'évolution typique.

Les circonstances immédiates, aussi bien que les conséquences d'une semblable éruption solaire peuvent être très variées selon les cas. Ainsi avec une faible accumulation de chaleur et une tension assez faible, on n'en viendra qu'à une nouvelle inflammation d'un astre déjà éteint, tandis qu'avec une plus forte concentration de chaleur, des parties isolées pourraient se séparer de la masse principale, s'en éloigner à d'assez grandes distances, et, prenant la forme de planètes, décrire autour de la masse principale des orbites elliptiques. On aperçoit aisément que dans l'hypothèse de circonstances convenables, des masses comparables aux planètes actuelles pourraient être, par une semblable éruption, conduites en leur lieu et dotées de mouvement de progression et de rotation, tandis que dans la masse solaire restante il subsisterait encore une provision de chaleur, qui agirait sur ces planètes avec une température très supérieure à celle dont notre Soleil dispose actuellement. Ce corps solaire serait de nouveau apte à céder pendant longtemps de la lumière et de la chaleur à ses planètes et à l'Univers, jusqu'au moment du

figeage de sa surface et du commencement de l'accumulation de chaleur. Le résultat global est toujours le même dans les circonstances les plus variées : périodicité des phénomènes dynamiques solaires.

Si enfin nous nous tournons vers le ciel des fixes pour étayer notre théorie, sur quels phénomènes diriger nos regards ? Evidemment d'un côté sur les soleils éteints, et de l'autre sur les soleils explosant brusquement. Et il est remarquable qu'un passé tout récent ait fourni des pièces à conviction pour ces deux classes de phénomènes. Pour les soleils éteints, l'obscur compagnon de Sirius, prévu par Bessel à partir des perturbations et observé réellement en 1862 par A. Clarke et Pond. Cet astre possède environ sept fois la masse du Soleil et n'a pu être rendu visible, en dépit de son obscurité, qu'à l'aide des meilleurs instruments. Et en second lieu, un compagnon déjà calculé de Procyon, mais non encore observé du fait de sa plus grande obscurité.

Des preuves d'incandescence renouvelée nous sont fournies par ces astres explosant brusquement, dont l'éclat s'éteint bientôt à nouveau, et dont l'histoire de l'Astronomie compte des exemples remarquables. Ainsi les deux étoiles nouvelles rendues célèbres par Tycho Brahé et Képler. Mais deux cas récents sont plus importants, parce qu'étudiés par l'analyse spectrale. Le 12 mai 1866, une petite étoile de dixième grandeur dans la Corona passa brusquement à la seconde grandeur et l'analyse spectrale montra que c'était une éruption d'hydrogène incandescent qui avait créé cette soudaine illumination. Celle-ci ne dura que douze jours.

Il en va de même pour la plus jeune des nouvelles étoiles observée pour la première fois par Schmidt à Athènes au milieu de décembre 1876. Son spectre comporte aussi surtout de l'hydrogène incandescent. Qu'il s'agisse ici d'une reprise de l'illumination d'un astre complètement éteint ou, comme dans le cas précédent, d'une brusque flambée d'un astre en activité, ne peut encore être tranché à l'aide des rares indications parvenues jusqu'ici [1].

Il ne semble pas que Boltzmann ait été convaincu par ces développements cosmologiques. Il écrit en effet, dans l'éloge de Loschmidt qu'il prononça à Vienne le 29 octobre 1895, soit près de vingt ans après :

« Le zèle ardent avec lequel Loschmidt s'occupa de sauver l'Univers de la mort thermique par dissipation de l'énergie dont celui-ci était menacé par les prescriptions de Clausius et de Lord Kelvin correspondait entièrement à son tempérament idéaliste. Il ne réussit pas dans ce sauvetage, à supposer que celui-ci fût vraiment nécessaire... [2] »

[1] [3], pp. 293-298.

[2] [15], p. 230. Boltzmann poursuit ici, ce qui est sans rapport avec notre objet actuel : « Mais il parvint à des résultats du plus haut intérêt, ayant été conduit par la considération du second principe à la théorie des solutions et liaisons chimiques. Il fut, dans ce domaine le précurseur de Horstmann et de Gibbs, dont les importantes acquisitions eussent été accélérées s'ils avaient connu ses travaux. »

De même, Boltzmann tient à souligner que Loschmidt a été, bien avant la lettre, l'inventeur du démon auquel est associé le nom de Maxwell :

« Par ailleurs, [Loschmidt] imagina des êtres extrêmement intelligents, capables de voir les différentes molécules d'un gaz et, à l'aide d'un dispositif quelconque, de séparer les molécules rapides des molécules lentes et de produire ainsi, alors même que tout événement aurait cessé dans le monde, de nouvelles différences de température.

Il s'est beaucoup occupé du retour de tout événement, idée qui fut illustrée de façon si dramatique par le professeur Mach dans l'histoire de l'écrevisse du lac de Mohrin et qui, sans influencer le cours du monde, jeta à différentes reprises le trouble dans l'esprit de nombreux théoriciens de la physique [1].

Il va de soi que Boltzmann ne pouvait accepter la disjonction qui lui était ainsi offerte par Loschmidt entre les postulats de Clausius-Kelvin et le second principe. Citons à cet égard, en anticipant quelque peu sur l'interprétation probabiliste du second principe, un exposé fait par Boltzmann le 29 mai 1886 devant l'Académie des sciences de Vienne.

Le second principe vient restreindre le premier :

« Le travail et l'énergie cinétique visible peuvent inconditionnellement se transformer l'un dans l'autre et se transformer de même inconditionnellement en chaleur, mais inversement la conversion de la chaleur en travail ou énergie cinétique visible est soit impossible, soit réalisable seulement en partie... Toutes les tentatives de sauver l'Univers de cette sorte de mort thermique sont demeurées sans succès...

» Quand, dans un système de corps, est enfermée une quantité donnée d'énergie, cette énergie ne se transforme pas d'une façon arbitraire, mais passe toujours des formes les moins probables aux formes les plus probables ; si initialement cette répartition ne correspondait pas aux lois des probabilités, elle y tendra de plus en plus. Mais, précisément, les formes d'énergie que nous pourrions vouloir réaliser en pratique sont toujours improbables. On veut, par exemple, qu'un corps se meuve d'un mouvement d'ensemble : il faut, pour cela, que toutes les molécules aient la même vitesse ; si nous considérons les molécules comme des individus indépendants, ce cas est le plus improbable que l'on puisse concevoir.

» Ce que nous appelons les formes dégradées de l'énergie sont les plus probables, ou plus exactement celles qui sont réparties entre les molécules de la façon la plus probable...

» A chaque répartition de l'énergie correspond une probabilité quantitativement déterminée. Comme celle-ci, dans les cas les plus importants de la pratique, est identique à la grandeur que Clausius a désignée sous le nom d'entropie, nous lui donnerons également ce nom. Tous les changements pour lesquels l'entropie augmente se produiront d'eux-mêmes, comme le dit Clausius...

On sait que cette idée, qui n'avait été exprimée qu'en deux lignes dans un travail de Loschmidt, fut proposée beaucoup plus tard par Maxwell et abondamment répétée depuis. Dès l'origine, je refusai de la considérer comme valable et objectai que si toutes les différences de température avaient cessé, aucun être intelligent ne pourrait plus davantage se former. » (*Ibid.*, p. 231.)

[1] [15], p. 231.

» Du fait qu'un système de corps ne passe jamais de soi-même d'un état à un autre état de même probabilité, mais toujours seulement d'un état à un état plus probable, il n'est donc pas possible de construire un système de corps qui, après avoir parcouru des états différents, revienne périodiquement à son état initial : un *perpetuum mobile*. Et nous sommes ainsi parvenus au point d'où l'on part d'habitude dans la considération du second principe. On pose comme axiome qu'il est impossible, avec un nombre fini de corps, de construire un *perpetuum mobile* ; on exprime cet axiome en équations, qui sont les équations fondamentales du second principe et alors on s'étonne de ce que, en admettant que l'Univers soit un vaste système constitué d'un nombre fini de corps, il résulte de ces équations que l'Univers lui-même ne puisse être un *perpetuum mobile*, ce qui cependant était déjà compris dans l'hypothèse faite. Si séduisants que soient de semblables aperçus et si irréfutables qu'ils puissent souvent paraître, je crois cependant que par là nous étendons des faits d'expérience bien au-delà de leurs limites naturelles [1]. »

Et cependant, Boltzmann lui-même devait sacrifier à de semblables considérations cosmologiques dans le but de concilier les apparences d'irréversibilité avec la réversibilité des équations d'un système mécanique :

Demandons-nous si l'irréversibilité de la durée, révélée par l'expérience pour tous les phénomènes naturels que nous connaissons, est compatible avec la notion d'un Univers illimité ; si le caractère de grandeur dirigée avec lequel la suite des temps nous apparaît comme donnée, est compatible avec une suite des temps infinie ou bien avec une suite des temps considérée comme formant un anneau fermé.

Si l'on veut pouvoir répondre affirmativement, il faut employer, comme image de l'Univers, un système dont les variations avec le temps soient données par des équations dans lesquelles la direction positive et la direction négative de la durée jouent le même rôle, et qui permettent pourtant d'expliquer, par une hypothèse spéciale, l'apparence d'irréversibilité observée pendant de longs intervalles de temps. On y parvient précisément dans la conception atomistique de l'Univers.

On peut se représenter le monde comme un système mécanique composé d'un nombre énorme de particules, et de durée immensément longue, de sorte que les dimensions de notre monde stellaire d'étoiles fixes soient minuscules comparées à l'étendue de l'Univers, et que la durée des temps que nous qualifions d'ères éternelles *(Æonen)* soit insignifiante comparée à la durée de l'Univers. Dans cet Univers règne presque partout l'équilibre thermique et, par suite, la mort ; mais on y trouve, par-ci par-là, des domaines relativement petits, de la dimension de notre monde stellaire (nous les appellerons des *mondes individuels*), qui pendant la durée relativement courte de l'ordre des ères, s'écartent notablement de l'équilibre thermique, ceux pour lesquels la probabilité des états croît étant tout aussi nombreux que ceux pour lesquels

[1] [5], pp. 33-35, 39 et 48.

elle décroît. Pour l'Univers tout entier, les deux directions du temps sont donc impossibles à distinguer, de même que, dans l'espace, il n'y a ni dessus ni dessous. Mais, de même qu'en une région déterminée de la surface de notre planète, nous considérons comme le dessous la direction qui va vers le centre de la Terre, de même un être vivant dans une phase déterminée du temps et habitant un tel monde individuel, désignera la direction de la durée qui va vers les états les moins probables autrement que la direction contraire : la première sera pour lui le passé ou le commencement, la seconde l'avenir ou la fin ; et d'après cette désignation, pour le même petit domaine isolé dans l'Univers, on aurait toujours, *au début du temps*, un état improbable. Cette méthode me semble la seule qui permette de concevoir le second principe de la thermodynamique, la mort thermique de chaque monde individuel, sans entraîner une modification irréversible de l'Univers tout entier depuis un état initial déterminé jusqu'à un état final définitif.

Assurément personne ne prendra de telles spéculations pour d'importantes découvertes, ni pour le but le plus élevé de la Science, comme le faisaient les anciens philosophes. Mais il n'est pas du tout certain qu'il soit juste de les tourner en dérision et de les regarder comme tout à fait oiseuses. Qui sait si elles n'élargissent pas l'horizon de notre cercle d'idées et ne font pas aussi avancer la connaissance des données de l'expérience, en augmentant la mobilité de nos pensées ?

Le fait que le passage d'un état probable à un état non probable ne s'accomplit pas aussi souvent que le passage inverse pourrait s'expliquer suffisamment en supposant que l'état initial de l'Univers entier qui nous entoure était très peu probable ; cette hypothèse entraîne la conséquence suivante : un système arbitraire de corps qui agissent mutuellement possédera en général au début un état non probable. Mais, pourrait-on objecter, le passage d'un état probable à un état qui ne l'est pas devrait bien se produire çà et là et parvenir à l'observation. A cela précisément répondent les considérations cosmologiques qui viennent d'être esquissées. Les données numériques sur la rareté extrême, inimaginable, du passage d'un état probable à un état moins probable produit dans un espace de dimensions mesurables pendant un temps de durée observable expliquent qu'un tel passage soit si extraordinairement rare et puisse échapper à toute observation dans ce que nous avons appelé un *monde individuel*, ou plus spécialement dans le nôtre.

Dans l'Univers tout entier, dans l'ensemble de tous les mondes individuels, il existe en fait des phénomènes se succédant dans l'ordre inverse. Mais les êtres qui les observent comptent peut-être aussi le temps en allant des états les moins probables vers les états les plus probables, et l'on ne pourra jamais découvrir s'ils comptent le temps d'une façon inverse de la nôtre, car ils sont séparés de nous, dans le temps, par des ères éternelles, et dans l'espace par $10^{10^{10}}$ fois la distance de Sirius et, par-dessus le marché, leur langage n'a aucun rapport avec le nôtre.

On peut rire, soit, mais on conviendra que l'image de l'Univers que je viens de développer est acceptable, qu'elle ne contient aucune contradiction en elle-même ; et aussi qu'elle n'est pas inutile, puisqu'elle nous ouvre plusieurs points de vue nouveaux et qu'elle stimule non seulement la spéculation, mais même l'expérimentation..., alors qu'aucune autre théorie ne pourrait le faire [1].

[1] [2, II], pp. 251-253.

IV. Fermons cette longue parenthèse cosmologique et revenons au problème de l'équilibre thermique d'un gaz pesant. La ténacité de Loschmidt nous vaut encore à ce sujet un quatrième mémoire qu'il convient d'analyser.

Boltzmann n'était pas resté passif devant les objections de Loschmidt. Cela, Loschmidt lui-même nous l'apprend, en citant les deux mémoires où Boltzmann avait d'abord défini, puis défendu son point de vue :

A. *Über das Wärmegleichgewicht von Gasen auf welche äussere Kräfte wirken* (14 octobre 1875), [28].

B. *Über die Aufstellung und Integration der Gleichungen, welche die Molecularbewegung in Gasen bestimmen* (14 décembre 1876), [29].

Et Loschmidt se propose de discuter les thèses de Boltzmann sans en rien omettre.

Il fait tout d'abord l'objection, peu raisonnable à la vérité, que l'énergie cinétique de deux molécules qui viennent à se choquer ne se conserve pas, non plus que le mouvement de leur centre de gravité, par suite de l'action des forces extérieures pendant la durée du choc.

A cela, Boltzmann avait opposé (dans B) que le diamètre des molécules et la durée du choc doivent être considérés comme infiniment petits, sans quoi les coordonnées des molécules ne pourraient être les mêmes avant et après le choc, sans quoi aussi les forces extérieures produiraient un travail pendant la durée du choc et changeraient le mouvement du centre de gravité. Si la durée du choc était finie, le corps cesserait d'être un gaz et la théorie cinétique ne serait plus applicable.

Loschmidt observe « que le corps ne cesserait que d'être un gaz idéal au sens de Clausius. Et avec de telles interdictions, nous devrions nous résigner à n'avoir aucun gaz en ce monde. Pour montrer combien les gaz réels sont éloignés de satisfaire à de telles conditions, le mieux est de considérer des gaz condensables dont on connaît la densité à l'état gazeux et à l'état liquide. L'acide carbonique en est un exemple : la densité du gaz est, selon Regnault, de 1,529 par rapport à l'air et celle du liquide à 0° de 0,947 par rapport à l'eau. La distance de deux molécules voisines en l'état gazeux est donc 7,88 fois plus grande qu'en l'état liquide. A une pression de 30 atmosphères, où l'acide carbonique présente encore longtemps le caractère d'un gaz, ce rapport tombe à 2,5. Si, comme on l'admet en l'état actuel de la théorie atomique, les molécules liquides se touchent immédiatement, ce nombre représente le rapport du diamètre moléculaire à la distance moyenne de deux molécules. Ce nombre s'écarte considérablement de celui qu'exige la théorie, dans le rapport de l'unité à l'infini ! »

Loschmidt reconnaît toutefois que, pour juger du rapport de la durée du choc de deux molécules à la durée moyenne qui s'écoule entre deux chocs, on manque encore des données nécessaires. Mais, du peu que l'on sait, il paraît extrêmement peu probable que la durée du choc puisse être tenue pour infiniment petite dans un gaz réel.

Et cependant les résultats du traitement analytique de gaz idéaux sont d'une valeur inestimable pour la connaissance des gaz de la nature. Si ces énoncés n'ont qu'une validité approchée, il en va de même pour presque toutes les lois physiques, et le progrès de la science subirait un grand préjudice si les physiciens écartaient, dans un esprit de rigueur mathématique, de tels résultats approchés.

Il en serait autrement si de telles conclusions devaient être utilisées comme point de départ pour la déduction de théorèmes de mécanique analytique. Car ceux-ci exigent une validité absolue et le respect intégral des hypothèses faites.

En cela, Loschmidt oppose curieusement aux vicissitudes inévitables des théories physiques la certitude des déductions qui mériteraient à ses yeux d'être intégrées à la mécanique.

Il conviendrait donc, pour Loschmidt, d'élever le second principe de la thermodynamique au rang de théorème incontestable, à l'exemple du premier principe. « C'est à quoi s'emploient les efforts des tenants de la nouvelle théorie cinétique, et au premier rang Boltzmann. Celui-ci a essayé, dans ses travaux antérieurs, en partant de la loi de répartition de Maxwell, de parvenir au second principe et au théorème sur la dissipation de l'énergie de l'Univers de Thomson-Clausius.

» Mais mon objectif principal est de contester la validité de ce dernier théorème, et non celle du second principe.

» Les hypothèses de Boltzmann ne valent que pour les gaz idéaux ; un tel abîme les sépare des propriétés des gaz réels qu'on ne saurait déduire celles-ci de l'analyse de Boltzmann. »

Dans son mémoire B, Boltzmann avait souligné que l'extension de la loi de répartition de Maxwell à un système soumis à des forces extérieures n'est possible que si celui-ci est composé d'un très grand nombre de points matériels, et seulement si la répartition des états est entièrement définie par l'arrangement des forces ainsi que par l'énergie cinétique contenue dans le système. Il arrive fréquemment que cette dernière condition ne soit pas remplie et que la répartition, c'est-à-dire la probabilité relative, des différents états du système dépende en outre des conditions initiales : « J'en ai moi-même, écrivait Boltzmann, donné un exemple à la fin de mon mémoire *Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen materiellen Punkten*. Soit un grand nombre de sphères élastiques identiques, qui à l'origine du temps sont mathé-

matiquement alignées dans un domaine limité par deux plans parfaitement élastiques et perpendiculaires à la direction de l'alignement. Si, initialement, toutes les sphères avaient exactement la même vitesse v_0, elles auraient encore même vitesse à tout instant, car le choc ne fait que renverser la direction de la vitesse. Si au contraire, au début du temps, la moitié des sphères étaient au repos et si toutes celles de l'autre moitié avaient la vitesse $v_0/2$, l'énergie cinétique initiale serait la même [que dans le premier cas], mais sa répartition entre les molécules serait différente à tout instant. Si par exemple les sphères initialement au repos étaient toutes placées immédiatement contre l'une des parois planes, elles resteraient toujours au repos, et les autres sphères contiendraient [toute] l'énergie cinétique. Loschmidt envisage un cas analogue : il imagine un nombre quelconque, peut-être infini, de sphères pesantes, élastiques, identiques, obligées de se mouvoir suivant une verticale et se réfléchissant en haut et en bas sur des parois élastiques. Il a le mérite d'avoir ainsi révélé, entre une infinité de points matériels, une répartition stable qui n'est pas définie seulement par l'énergie cinétique contenue dans le système, et à laquelle par conséquent la loi de répartition ne s'applique pas. Car en fait une seule et même énergie cinétique peut être répartie de différentes façons entre ces sphères. On n'est cependant pas amené à conclure [avec Loschmidt] que l'énergie cinétique moyenne des sphères doive augmenter vers le bas. Cela peut être le cas, mais le contraire peut aussi arriver [1]. »

Loschmidt n'admet la validité de cette critique que pour une partie seulement des modèles qu'il avait proposés. Il se tourne alors vers les résultats positifs du mémoire B où Boltzmann démontre que, dans un gaz pesant, *si l'on fait abstraction des chocs entre les molécules*, la répartition des vitesses est indépendante du temps lorsque, dans toute tranche dz, l'état initial du gaz est défini par la formule :

$$Ce^{-h(u^2+v^2+w^2)-kz} \tag{1}$$

où les constantes C, h, k sont définies par la densité et la température du gaz. La gravitation n'a, dans ces conditions, aucune influence sur la valeur moyenne des éléments du mouvement des molécules. Démonstration inattaquable, reconnaît Loschmidt.

Boltzmann s'occupe alors du *problème de l'immission*, c'est-à-dire de l'état de mouvement d'un gaz dont les molécules sont introduites graduellement dans un vase primitivement vide :

« Pour avoir une représentation claire, imaginons un réservoir illimité

[1] [29], p. 520.

vers le haut. On peut conserver les parois latérales ou les supposer enlevées, car elles n'ont aucune influence perturbatrice sur le mouvement des molécules. Les molécules ne doivent exercer les unes sur les autres aucune action et sont donc sous la seule influence de la pesanteur. Chaque molécule monte donc suivant une parabole, atteint une hauteur maximum et redescend suivant cette parabole. Aussitôt que la molécule touche à nouveau le fond, elle doit être immédiatement éloignée. Nous remplaçons ainsi les réflexions sur le fond du réservoir par l'immission de molécules nouvelles, que nous éloignons également aussitôt qu'elles retombent sur le fond. Il est clair qu'au bout d'un temps suffisamment long le réservoir sera rempli de molécules de gaz et l'on cherche la façon dont les molécules seront réparties dans le réservoir, au bout d'un temps très long [1]. »

L'immission des molécules devra, comme le montre le développement du calcul, être réglée de telle façon que, dans la couche la plus basse du réservoir, règne en permanence la loi de Maxwell. On parvient ainsi, dans les différentes couches, à la répartition exprimée par la formule (1).

Tout en contestant que ses propres calculs (où les fractions individuelles introduites comportaient au contraire une répartition de Maxwell) en soient infirmés, Loschmidt donne acte à Boltzmann d'avoir résolu exactement un double problème, savoir :

1° trouver un arrangement de molécules pesantes conforme à la loi de Maxwell et qui ne soit pas troublé par l'action de la pesanteur ;

2° donner un moyen (processus d'immission) propre à réaliser cet état.

Le tout, répétons-le, sans interaction entre les molécules.

Boltzmann supprime alors cette restriction :

« Comme la répartition [donnée par la formule (1)] s'est établie d'elle-même sous l'influence de la pesanteur, il est absolument évident qu'elle ne saurait être perturbée par l'action de la pesanteur sur les molécules, lorsque l'immission des particules sera suspendue, une fois cette répartition réalisée, et que les molécules se réfléchiront sur le fond du réservoir, à la manière de sphères élastiques... On pourra ensuite, en suivant exactement le raisonnement de Maxwell, montrer que cette répartition ne peut pas davantage être détruite par les chocs [2]. »

A cela, Loschmidt fait aussitôt l'objection suivante : « Si une telle superposition des actions de la gravité et des chocs est admissible, le raisonnement suivant doit être également valable : supposons que, dans

[1] [29], p. 514.
[2] *Ibid.*, p. 517.

une masse de gaz, un état stationnaire se soit institué sous l'influence simultanée de la pesanteur et des chocs. Si, brusquement, on laisse la gravité disparaître, on devrait [si le raisonnement de Boltzmann était admissible] constater aussi peu de changement dans l'état du gaz que dans le cas où on élimine les chocs.

» Or, en fait, une modification devrait intervenir, savoir la tendance à l'établissement d'une densité uniforme. Après l'intervention de ce nouvel état, la loi de Maxwell serait certainement valable. Mais il est permis de se demander si quand la gravité intervient à nouveau et par suite les différences de densité, la même loi doit rester satisfaite.

» Du fait qu'un conflit de ces deux puissances se manifeste dans la structure des rapports de densité, on ne peut admettre, sans autre justification, une harmonie entre leurs tendances en matière de répartition des vitesses. Nous savons seulement de façon certaine que les chocs à eux seuls amènent partout, dans une masse de gaz, une densité uniforme et la répartition de Maxwell.

» Nous savons aussi que la pesanteur vient perturber cette densité uniforme et introduit, à titre stationnaire, une densité non uniforme. Nous ignorons si, ce faisant, la pesanteur laisse intacte la loi de Maxwell. Car la preuve que l'on peut imaginer une répartition pour laquelle la loi de Maxwell serait valable et qui ne serait pas perturbée si la gravité venait à agir seule n'est pas suffisante à cet égard. Il n'est pas permis de déduire du fait que les chocs *à l'intérieur d'un élément de volume* ne sauraient apporter aucune perturbation à la répartition, une conclusion sur leur influence dans toute la masse. Car des perturbations doivent se produire partout où deux éléments de volume de densités différentes viennent à se choquer, soit partout à la frontière de deux couches horizontales. Le raisonnement [de Boltzmann] devrait plutôt conduire à infirmer qu'à renforcer le théorème en question. »

Loschmidt doit cependant reconnaître que, dès son mémoire A, Boltzmann avait donné les lois générales de variation de la fonction de répartition f en présence d'un champ de forces extérieur [1] et que, se fondant sur ces lois, il s'efforce de démontrer, dans son mémoire B, que la loi de répartition (1) est la seule possible pour un gaz pesant.

Loschmidt n'est pas pour autant convaincu et se refuse toujours à admettre l'égalité des températures dans toutes les couches horizontales du gaz :

» J'ai démontré l'existence du contraire dans deux cas particuliers :

» Premièrement, quand la masse de gaz possède un nombre fini, aussi grand que l'on veut, de molécules et que le récipient prismatique qui la

[1] Voir plus haut, p. 149, équation (5).

contient n'est pas limité vers le haut. Il doit y avoir une limite supérieure dans le réservoir, à laquelle les molécules peuvent parvenir et où la valeur moyenne de l'énergie cinétique doit nécessairement approcher de zéro.

» Deuxièmement, quand dans un récipient il n'y a que très peu de molécules, deux ou trois par exemple. Alors la dépendance de l'énergie cinétique moyenne de la coordonnée z est évidente.

» Il semble donc que la solution de Boltzmann doive être limitée au cas, de beaucoup le plus important, où le nombre des molécules est extrêmement grand et, là encore, on doit exclure la considération des couches supérieures. Mais une objection très forte est la suivante : on doit être très surpris du fait que cette formule ne conduise à aucun inconvénient, s'il n'y a pas de forces extérieures. Cela vaut aussi bien, avec des modifications évidentes, pour deux ou trois molécules que pour des trillions. [Il n'y a qu'une seule proposition, que Boltzmann utilise à la fin de la déduction A, celle de l'égalité du nombre des chocs directs et inverses, qui suppose l'existence d'une infinité de molécules.]

» Une remarquable circonstance me frappe au cours de cet examen [des calculs de Boltzmann], c'est l'hypothèse faite, dans l'interprétation de la formule finale, que les limites de l'énergie cinétique d'une molécule devraient toujours être étendues de 0 à $+\infty$, hypothèse qui dans un grand nombre de cas est certainement inadmissible.

» Quand, par exemple, le récipient ne contient qu'un nombre limité de molécules, dont l'énergie totale U est nécessairement finie, les limites des composantes u, v, w de la vitesse ne peuvent être $-\infty$ et $+\infty$, car l'énergie cinétique $\sum \frac{m}{2}(u^2+v^2+w^2)$ est nécessairement limitée par U pour $z=0$ et par $U-mgz$ à la hauteur z.

» Cette expression qui, pour une hauteur suffisante du récipient, doit être prise égale à zéro, jointe à la formule finale pour la fonction de répartition f, renforce les difficultés signalées plus haut, en donnant seulement, à la limite supérieure, une valeur nulle de l'énergie cinétique moyenne et, à partir de là, une augmentation de celle-ci vers le bas. De ce fait, l'exactitude des limites générales des composantes de la vitesse est mise en cause, et cela même pour des systèmes comprenant un nombre arbitrairement grand de molécules. Bien plus, la probabilité est très grande que ces limites soient des fonctions des coordonnées et que leurs valeurs numériques varient avec la densité et la température aux différents points du gaz. Il est très surprenant que l'analyse de Boltzmann se limite exclusivement au cas d'un seul élément de volume et ne se soucie pas, dans l'établissement des équations différentielles, des pro-

cessus entre deux volumes élémentaires se choquant mutuellement. On serait donc fondé à conclure, avec quelque probabilité, que les équations posées ne suffisent pas à la solution complète du problème, et ne sauraient donner aucune détermination des valeurs limites des composantes des vitesses des molécules. Incidemment, on remarque en outre que l'hypothèse selon laquelle le nombre des chocs entre deux classes de molécules caractérisées par les vitesses de composantes u, v, w et u_1, v_1, w_1 doive être proportionnel à ff_1 est très douteuse, car *les énergies cinétiques de deux molécules voisines ne sont pas indépendantes les unes des autres.* Si, par exemple, à l'instant t, la molécule m possède une très grande énergie cinétique, la valeur moyenne de l'énergie cinétique des molécules qui l'entourent dépassera, aux instants suivants la moyenne générale du système, car cette molécule aura pour ainsi dire momentanément une très haute température qu'elle cédera par transmission de chaleur à son voisinage. Pendant cette cession, elle entrera plus souvent en collision avec d'autres molécules que la loi de Maxwell ne le compte. Cela veut dire aussi, en général : une molécule momentanément très froide ou très chaude ne se trouve pas quelque part au hasard au milieu de la masse de gaz homogène, mais est caractérisée par un voisinage qui lui est conforme. Je ne développerai pas davantage ici les conséquences de cette observation, et ferai seulement la remarque que ces conséquences semblent réduire considérablement l'applicabilité du calcul des probabilités à la théorie cinétique des gaz [1]. »

Ici se manifeste encore la tendance de Loschmidt, que nous avons déjà soulignée, d'échapper aux servitudes de la statistique et au jeu abstrait de la théorie cinétique pour isoler et discuter, par des raisonnements concrets, le comportement individuel des molécules ou de leur voisinage. En dernière analyse, Loschmidt conclut son quatrième mémoire en confirmant sans ambages son opposition :

« Si, en conclusion, nous résumons les résultats de notre discussion, nous pouvons le faire en deux propositions :

» 1° Les résultats [de Boltzmann], en vertu de leur point de départ, ne peuvent prétendre qu'à une validité approchée pour les gaz réels et sont donc à considérer comme inutilisables pour fonder des théorèmes généraux de thermodynamique.

» 2° L'uniformité de la température dans toutes les couches d'une masse de gaz n'est nullement garantie par la formule [de Boltzmann], parce qu'il est en outre nécessaire d'admettre que les limites des composantes de la vitesse sont les mêmes dans toute la masse de gaz. Cette hypothèse est inadmissible pour les systèmes composés d'un petit

[1] [4], pp. 223-225.

nombre de molécules, et n'est pas démontrée pour les systèmes composés d'un grand nombre de molécules [1]. »

Luttant seul, dans tout l'espace allemand, en faveur de la théorie cinétique, Boltzmann ne pouvait négliger de réfuter Loschmidt sur son propre terrain, même s'il devait penser que les déductions de celui-ci restaient en dehors du champ de cette théorie correctement entendue. Nous allons le voir ainsi obligé d'entrer lui-même dans le jeu des constructions particulières inauguré par Loschmidt.

« C'est intentionnellement, déclare Boltzmann dans la seconde partie *(Über das Wärmegleichgewicht in einem schweren Gase)* d'un mémoire daté du 6 juin 1878, que je n'ai pas mentionné les constructions de Loschmidt, car celui-ci ne semble même pas avoir apporté l'ombre d'une démonstration qu'à l'aide de celles-ci l'on puisse établir la nécessité d'inégalités dans l'énergie cinétique moyenne à différentes hauteurs [2]. »

Et Boltzmann revient à un modèle où un très grand nombre de sphères élastiques pesantes oscillent verticalement entre deux plans horizontaux (sol et plafond) parfaitement élastiques. Le nombre des sphères qui, en moyenne, se trouvent sur un segment vertical, par exemple d'un millimètre, est plus faible vers le bas que vers le haut. En effet, on peut admettre que les molécules se traversent sans résistance et que chacune d'elles oscille pour son propre compte entre sol et plafond. Il est bien évident que chaque sphère traverse de plus en plus vite les couches inférieures, d'où l'on déduit que la densité des sphères diminue lorsque la profondeur augmente. Mais il serait absolument inexact d'étendre cette conclusion à un gaz pesant. Pour parvenir à des résultats qui correspondent plus étroitement aux circonstances d'un gaz réel, nous admettons qu'entre sol et plafond existent aussi des molécules ayant, en chaque point, une vitesse inférieure à celle qu'elles atteindraient en y tombant en chute libre depuis le plafond. Nous dirons que l'énergie de ces molécules est inférieure à la valeur critique. Comme ces molécules ne se rencontrent que dans les couches inférieures, la densité pourra augmenter vers le bas. Mais comme leur énergie cinétique est très petite, il n'est pas exclu que l'énergie cinétique moyenne soit égale, ou même inférieure, dans les couches inférieures, à celle des couches supérieures.

Ayant donné de la chose un exemple numérique, Boltzmann conclut :

« Si, dans une rangée verticale de sphères élastiques pesantes, aucune ne possède une énergie inférieure à la valeur critique, l'énergie cinétique augmente en profondeur, mais la densité y est alors plus faible. Ce cas

[1] [32], p. 264.
[2] *Ibid.*

se produira toujours lorsque aucune sphère n'ayant initialement une énergie inférieure à la valeur critique, le système ne se trouve en interaction avec aucun autre système à travers le sol ou le plafond, en sorte que l'énergie cinétique d'aucune sphère ne puisse, au cours du temps, tomber au-dessous de la valeur critique. Si, au contraire, il y a interaction avec d'autres systèmes comme cela est le cas pour les constructions que Loschmidt me fait grief de n'avoir pas citées, l'énergie cinétique de nombreuses sphères tombera au-dessous de la valeur critique et les circonstances seront toutes différentes dans le système des sphères oscillantes : la densité augmentera vers le bas et on ne voit pas, en pareil cas, que Loschmidt ait démontré l'impossibilité d'une égalisation de l'énergie cinétique entre le sol et le plafond [1]. »

Boltzmann rappelle que dans la première partie de son mémoire B, il a démontré que la répartition qu'il avait obtenue était possible, c'est-à-dire qu'une fois instituée, elle demeure stable ; ensuite il a cherché à démontrer que cette répartition était la seule possible.

« J'avais séparé la première démonstration en deux parties. Tout d'abord j'ai démontré que la loi de répartition dont il s'agit n'est pas troublée par l'action de la pesanteur ; ensuite qu'elle ne l'est pas davantage par les chocs entre les molécules. Loschmidt considère cette seconde partie comme une pure affirmation, ce dont la stylisation de cette partie de mon mémoire est responsable, et objecte que l'on pourrait tout aussi bien conclure que si la gravité était supprimée, la répartition ne serait pas changée. Il serait préférable de styliser ainsi ma démarche : 1° Quand il n'y a ni forces extérieures, ni chocs, et qu'initialement règne la distribution de Maxwell, celle-ci subsiste indéfiniment. Comme la répartition de Maxwell n'est pas troublée par les chocs, elle se maintient dans un gaz où se produisent des chocs et où n'agit aucune force extérieure. 2° Quand il y a pesanteur en l'absence de chocs, et que la répartition dont il s'agit a été établie initialement entre les molécules du gaz, cette répartition se maintient pareillement. Mais comme, à nouveau, elle n'est pas troublée par les chocs, elle subsiste dans un gaz pesant où se produisent des chocs.

» Si, dans le mémoire cité, je n'ai pas cru devoir donner *in extenso* la preuve que cette répartition, pas plus que celle de Maxwell, n'est pas troublée par les chocs, c'est parce que, d'une part, cette preuve peut s'établir d'une manière tout analogue à celle que Maxwell a suivie, et que d'autre part elle résulte nécessairement des théorèmes de mes mémoires précédents [2]. »

[1] [32], p. 271.
[2] *Ibid.*, pp. 272-273.

Boltzmann reconnaît que la démonstration générale qu'il a donnée de l'équilibre thermodynamique d'un gaz pesant ne s'applique qu'à un gaz idéal, où la durée du choc de deux molécules est infiniment petite. Mais Loschmidt n'est pas fondé à critiquer les limites $\pm\infty$ admises pour les composantes de la vitesse, car dès l'instant où le nombre total des molécules est suffisamment grand, la possibilité est ouverte à chaque molécule de prendre une vitesse très supérieure à sa valeur moyenne.

Boltzmann n'accepte pas davantage le grief que lui fait Loschmidt de ne pas s'être soucié des interactions entre deux éléments de volume dans l'établissement même des équations différentielles, alors qu'il a eu soin, au contraire, de considérer toutes les molécules entrant et sortant par les six faces d'un parallélépipède découpé dans le gaz.

Plus délicate est l'objection selon laquelle le nombre des chocs ne saurait s'exprimer par le produit ff_1, si les énergies cinétiques des molécules cessaient d'être indépendantes. Loschmidt pense que lorsqu'une molécule possède une énergie cinétique particulièrement grande, l'énergie des molécules voisines doit bientôt augmenter par transmission de chaleur. On pourrait tout aussi bien soutenir qu'une molécule ne saurait acquérir une énergie cinétique élevée qu'à la faveur d'une série de chocs exceptionnellement favorables, qui laisseraient au contraire son voisinage très pauvre en énergie cinétique. On doit ainsi distinguer entre le cas où une petite partie du gaz aurait une température élevée et celui où une molécule individuelle bénéficierait du seul jeu des échanges maxwelliens.

Mais Boltzmann avoue qu'aucune démonstration précise n'a été apportée qui permette d'affirmer que l'énergie cinétique moyenne du voisinage d'une molécule ne dépend pas de l'état de celle-ci. Pour les gaz, on se contente d'invoquer le fait qu'entre deux chocs une molécule parcourt un chemin très grand devant la distance moyenne de deux molécules [1].

[1] Bien que très ouvert à la critique, Boltzmann se fâche quand Loschmidt lui reproche d'avoir justifié l'annulation du second membre de l'équation de collision après une analyse aussi subtile que profonde, alors que la chose paraissait quasi évidente. Cette remarque, déclare Boltzmann, « *klingt wie Spott* ».

Du paradoxe de réversibilité vers l'interprétation probabiliste du second principe

Après cet exposé, qui semblera peut-être trop développé aux yeux du lecteur, de l'ensemble des objections de Loschmidt, revenons au paradoxe de réversibilité.

Boltzmann s'est employé à le réfuter dans ses Leçons sur la théorie des gaz :

« Supposons un gaz qui soit renfermé dans un récipient à parois absolument lisses et élastiques. Au début règne dans ce gaz une répartition de vitesses quelconque qui n'est pas la plus probable, mais qui, cependant, ne comporte aucune organisation moléculaire ; par exemple, toutes les molécules ont une même vitesse c. Après l'écoulement d'un certain temps t, la répartition qui y régnera sera très voisine de celle de Maxwell. Imaginons qu'au temps t la vitesse de chaque molécule ait sa direction exactement renversée sans que sa grandeur change. Le gaz repassera alors en sens inverse par tous ses états précédents. Nous avons donc le cas d'une distribution de vitesses qui se transforme en une autre de plus en plus éloignée de la plus probable, et où par conséquent la grandeur H croît par suite des chocs. Ceci n'est nullement en contradiction avec ce qui a été démontré [auparavant] ; car la supposition, faite alors, que la répartition ne présentait aucune organisation moléculaire n'est pas réalisée ici puisque, après l'inversion exacte de toutes les vitesses, chaque molécule ne heurtera pas les autres conformément aux lois des probabilités, mais suivant une loi très particulière et que l'on peut calculer à l'avance. Dans l'exemple cité, dans lequel nous supposerons égales les masses de toutes les molécules, celles-ci avaient toutes au début la même vitesse c. Après qu'en moyenne chaque molécule aura été heurtée une fois, beaucoup de molécules auront une autre vitesse γ ; mais, en laissant de côté les quelques-unes qui auront subi plusieurs chocs, toutes ces molécules viennent d'éprouver un choc dans lequel l'autre molécule heurtante aura reçu la vitesse $\sqrt{2c^2-\gamma^2}$. Supposons maintenant que nous changions à nouveau exactement les vitesses de

signe ; alors presque toutes les molécules dont la vitesse est γ iront heurter précisément celles dont la vitesse est $\sqrt{2c^2-\gamma^2}$, et c'est là une loi caractéristique d'un état d'organisation moléculaire [1]. »

Boltzmann insiste sur le fait que la croissance de la grandeur H qui se produit ici n'est pas en contradiction avec les lois du calcul des probabilités ; car celles-ci nous enseignent seulement la non-probabilité, mais non pas l'impossibilité d'une semblable augmentation.

On se tromperait encore, ajoute Boltzmann, si l'on attribuait au mouvement obtenu par inversion du sens des vitesses la même probabilité qu'au mouvement originel :

« Supposons que, pour un certain mouvement, H ait décru depuis le temps t_0 jusqu'au temps t_1. Si au temps t_0 l'on change le signe de toutes les vitesses, on ne sera aucunement conduit à un mouvement pour lequel H doive croître ; au contraire, H décroîtra probablement de nouveau. Ce n'est que si l'on produit l'inversion des vitesses au temps t_1 que l'on obtient un mouvement où H croît pendant le temps $t_1 - t_0$: mais, probablement, il décroîtra après cela, de sorte qu'ainsi les mouvements pour lesquels H est continuellement très voisin de sa valeur minima sont de beaucoup les plus vraisemblables [2]. »

Ces considérations ne devaient pas convaincre Brillouin, qui fut en France l'introducteur de la *Gastheorie* :

« Il m'est impossible d'admettre avec M. Boltzmann que le mouvement soit *molekular-ungeordnet* à l'aller, et devienne *molekular-geordnet* après renversement des vitesses, par le seul fait que l'aller aura fait connaître la succession des chocs pour le retour [3]. »

Au contraire, Borel reprend à ce sujet, sous une forme plus simple et semble-t-il plus claire, le raisonnement de Boltzmann et conclut que le paradoxe de réversibilité n'apporte qu'une contradiction apparente au théorème H :

« Nous venons d'établir que, dans l'évolution naturelle d'un gaz pris dans un état quelconque, il est extrêmement probable que l'expression H décroîtra constamment. Cette conclusion peut paraître inadmissible, car si à un instant donné on inverse exactement les vitesses des molécules (ce qui ne change pas la valeur de l'expression H), le gaz repassera en sens inverse par la succession d'états qu'il venait de traverser ; la fonction H ira donc en croissant si elle décroissait auparavant. Il est donc impossible que cette fonction décroisse quel que soit l'état initial, et il y a même, semble-t-il, autant de chances pour qu'elle croisse que pour qu'elle décroisse.

[1] [2], I, pp. 40-41.
[2] *Ibid.*, pp. 41-42.
[3] *Ibid.*, note I, p. 197.

» Il n'y a là qu'une contradiction apparente, car si le raisonnement que nous avons fait est bien applicable dans le cas d'un mouvement naturel quelconque, il ne l'est pas dans le cas du mouvement inverse, qui n'est d'ailleurs pas physiquement possible.

» Ce raisonnement repose en effet essentiellement sur l'hypothèse de l'inorganisation moléculaire, qui nous a permis d'établir la formule donnant le nombre de chocs d'une espèce déterminée : Nous avons admis qu'à un instant quelconque les molécules de vitesse (u_1, v_1, w_1) ont des positions indépendantes de celles des molécules de vitesse (u, v, w). Il est certain que cette hypothèse n'est pas rigoureusement exacte, car les molécules considérées font partie d'un même système mécanique ; elles ont pu notamment se heurter dans l'évolution antérieure du gaz. Mais, en réalité, à cause de l'énorme dispersion produite par les chocs, les positions des molécules ne dépendent pas plus (dans des domaines petits, mais déjà grands par rapport aux dimensions moléculaires) de l'état du gaz un petit nombre de chocs auparavant, que de n'importe quoi dans l'univers, ayant une action si faible soit-elle sur l'évolution du gaz. Ces positions peuvent donc bien être considérées comme absolument indépendantes.

» Il n'en est plus de même si, à un moment donné, on inverse exactement toutes les vitesses, car alors les premiers chocs se produiront entre des molécules qui viennent de se heurter, et dont les positions ne sont par suite pas indépendantes. Nos raisonnements ne s'appliquent donc plus, et la fonction H peut croître. Pour que le mouvement ainsi commencé continue à être inverse du mouvement primitif, il faudrait d'ailleurs que tout l'univers ait été rigoureusement inversé ; il suffit en effet qu'une molécule se soit un peu déplacée sur Sirius pour que notre gaz s'écarte presque immédiatement de la suite des états par lesquels il avait passé. L'évolution inverse d'une évolution naturelle ne peut donc pratiquement pas se produire, et si après l'inversion des vitesses les premiers chocs font bien croître H, très rapidement l'inorganisation moléculaire redeviendra complète, et H recommencera à décroître [1]. »

Ainsi, pour Borel, la dispersion dans un gaz réel équivaut à une sorte de tirage au sort continuel.

Quoi qu'il en soit de ces discussions, il est essentiel de souligner l'importance absolument décisive exercée par le paradoxe de réversibilité sur l'orientation de la pensée de Boltzmann.

Sans cette objection de Loschmidt qui, pour naturelle et même immédiate qu'elle puisse paraître après coup, a été ainsi à l'origine d'un véritable tournant de la science, Boltzmann en serait sans doute resté à la première formulation qu'il avait donnée du second principe de la

[1] Cf. Borel, [2], pp. 59-60.

thermodynamique, et où ce principe apparaissait, à la faveur d'une simple interprétation cinétique de la température, comme un pur théorème de mécanique analytique voisin du principe de la moindre action ; voie sans grand espoir où Boltzmann avait été cependant suivi par Clausius, Szily, Müller, Ledieu et d'autres encore.

La lecture des mémoires originaux de Boltzmann ne nous laisse aucun doute sur la netteté et la rapidité de cette évolution ; en particulier la remarquable discussion *Über die Beziehung eines allgemeinen mechanischen Satzes zum zweiten Hauptsatze der Wärmetheorie* figurant dans un mémoire daté du 11 janvier 1877, où apparaît pour la première fois la tendance de faire du second principe, non plus un théorème de mécanique analytique, mais une proposition directement liée au calcul des probabilités, et cela dans le but d'échapper à l'objection de réversibilité.

Loschmidt, nous dit Boltzmann au début de cette discussion, a formulé une proposition qui tendrait à nier la possibilité d'une démonstration purement mécanique du second principe. Il y a là une idée très profonde de nature à éclairer la véritable signification du second principe ; mais comme la thèse de Loschmidt se présente sous un vêtement philosophique qui risque de la rendre difficile à saisir pour beaucoup de physiciens, Boltzmann croit devoir la reprendre sous une autre forme.

Supposons donc que nous voulions démontrer, par une voie purement mécanique, que tous les processus de la nature se déroulent toujours de façon que soit satisfaite la condition suivante :

$$\int \frac{dQ}{T} \leqq 0. \tag{1}$$

Nous considérons les corps comme des agrégats de points matériels, entre lesquels s'exercent des forces connues, uniquement fonction de leurs positions relatives. Pour calculer le mouvement de ces points matériels, et par suite l'évolution des corps, il nous faut connaître les conditions initiales, positions et vitesses, de ces points. On cherche toujours à démontrer le second principe à partir de la nature des forces et sans égard aux conditions initiales, dont on ignore tout. En d'autres termes, on s'efforce de démontrer que, *quelles que soient les conditions initiales*, l'inégalité (1) est satisfaite.

Nous allons vérifier que si à l'instant $t = 0$, les conditions initiales sont telles que la condition (1) soit satisfaite, on peut toujours, sans rien changer aux forces agissant sur les points matériels, trouver des conditions initiales telles que l'inégalité inverse :

$$\int \frac{dQ}{T} \geqq 0 \tag{2}$$

soit satisfaite. En effet, considérons l'état atteint par les points matériels au bout du temps t_1, à partir des premières conditions initiales. Donnons alors à chaque point, comme nouvelles conditions initiales, les vitesses atteintes à ce même instant, mais *changées de sens* [1]. Il est clair que les points repasseront en sens inverse par les mêmes états, ce qui changera le signe de $\int \frac{dQ}{T}$.

Or, dans tous les processus du monde où nous vivons, la condition (1) est satisfaite ; cela ne provient pas des lois de force, mais des seules conditions initiales. *Toute tentative de démontrer l'inégalité (1) à partir de la nature des corps et des lois des forces agissant entre eux est donc vaine.*

« Cette conclusion, déclare Boltzmann, paraît très séduisante et constitue un sophisme des plus intéressants [2]. »

Pour déceler l'erreur qu'elle contient, Boltzmann prend comme exemple le cas d'un système constitué d'un *nombre fini* de points matériels et rigoureusement isolé du reste de l'univers.

Soit un nombre très grand, mais non infiniment grand, de sphères parfaitement élastiques enfermées dans un récipient immobile à parois parfaitement élastiques. Les sphères ne sont soumises à aucune force extérieure. Supposons qu'à l'instant initial la répartition des sphères ne soit pas uniforme : par exemple, il y aurait beaucoup plus de sphères à droite qu'à gauche, plus de sphères animées d'une grande vitesse en haut qu'en bas. Le sophisme consiste en ceci que, sans égard aux conditions initiales, on ne pourrait démontrer que la répartition des sphères s'homogénéise avec le temps. Avec les conditions initiales que nous venons de supposer, les sphères seraient réparties de façon uniforme, par exemple au bout d'un temps t_1. Par l'opération de renversement déjà décrite, les sphères tendraient, à partir de conditions initiales identiques pour les positions et inverses pour les vitesses à celles régnant au temps t_1, à se distinguer de plus en plus. On est donc conduit à penser qu'il est impossible de démontrer que, quelles que soient les conditions initiales, la répartition des sphères doit être nécessairement uniforme au bout d'un temps t_1. « *Cela, le calcul des probabilités lui-même nous l'enseigne : car aucune répartition non uniforme, si improbable qu'elle soit, n'est rigoureusement impossible* [3]. » Il est clair que toute répartition uniforme,

[1] Boltzmann observe à ce sujet que l'on doit renverser simultanément le mouvement des points matériels de tous les corps avec lequel le corps donné serait en interaction directe ou indirecte. En d'autres termes, on suppose que le renversement des vitesses est appliqué à tous les points matériels d'un système complètement isolé du reste de l'Univers, faute de quoi il faudrait renverser les vitesses dans l'Univers tout entier.

[2] [30], p. 119.

[3] *Ibid.*, p. 120.

prenant naissance au bout d'un temps déterminé à partir de conditions initiales données, est aussi improbable qu'une répartition non uniforme, de même qu'au jeu de loto tout ensemble de cinq chiffres est aussi improbable que l'ensemble 12345. La plus grande probabilité de voir la répartition s'homogénéiser avec le temps provient uniquement du fait que les états uniformes sont beaucoup plus nombreux que les états non uniformes. On ne peut donc démontrer que, quelles que soient les conditions initiales, la répartition doive être uniforme au bout d'un temps très long, mais seulement qu'un nombre infiniment plus grand d'états initiaux conduisent, au bout d'une durée suffisamment longue, à une répartition uniforme qu'à une répartition non uniforme, et que même dans ce dernier cas la répartition deviendra uniforme après une durée encore plus longue.

« La proposition de Loschmidt nous enseigne seulement à connaître des conditions initiales qui conduisent, au bout d'une durée déterminée t_1, à une répartition hautement improbable, mais elle n'exclut pas qu'un nombre infiniment plus grand d'états initiaux puissent conduire à une répartition uniforme [1]. »

Au contraire, comme il y a beaucoup plus de répartitions uniformes que de répartitions non uniformes, le nombre des états qui doivent conduire au bout d'une durée déterminée t_1 à des répartitions uniformes doit être beaucoup plus grand que celui des états qui conduisent à des répartitions non uniformes, lesquels doivent être précisément choisis suivant le procédé de Loschmidt.

« *On pourrait calculer ainsi, à partir de leur nombre, la probabilité des différentes répartitions d'état, ce qui conduirait peut-être à une méthode intéressante pour déterminer l'état d'équilibre thermodynamique* [2]. »

On voit poindre ici l'annonce du programme que Boltzmann devait effectivement mettre en œuvre dans le mémoire fondamental que nous analyserons bientôt [3]. Ainsi, loin de se laisser abattre par l'objection de réversibilité, Boltzmann y trouve aussitôt un levier. Cela témoigne à la fois de l'ouverture de son esprit à la critique et de la puissance de sa dialectique.

Boltzmann revient encore, de façon précise, au second principe. Il observe qu'on n'est parvenu jusqu'alors à démontrer que dans quelques cas particuliers seulement le fait que lorsqu'un système passe d'une répartition non uniforme à une répartition plus uniforme, $\int \frac{dQ}{T}$ est

[1] [30], p. 120.
[2] *Ibid.*, p. 121.
[3] Voir plus loin, p. 192 et suiv.

négatif, et positif au contraire dans la transition inverse. Comme il existe beaucoup plus de répartitions uniformes que de répartitions non uniformes, la seconde éventualité est extrêmement improbable et, en pratique, on peut la considérer comme impossible ; aussi impossible que d'admettre que de l'oxygène et de l'azote mélangés dans un récipient se séparent chimiquement au bout d'un mois, l'oxygène en bas, l'azote en haut, fait que le calcul des probabilités montre n'être pas impossible, mais extrêmement improbable. « *La proposition de Loschmidt m'apparaît cependant très importante, car elle montre la liaison intime qui existe entre le second principe et le calcul des probabilités, dont au contraire le premier principe est tout à fait indépendant.* Dans tous les cas où l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$ peut être négative, il y a des conditions initiales isolées très peu probables qui la rendent positive ; et la démonstration qu'elle doive être presque toujours négative ne peut être obtenue que par le calcul des probabilités...

» Je voudrais encore, déclare Boltzmann, mentionner une conséquence de la proposition de Loschmidt, savoir que si nous remontons aux états de l'Univers dans le passé infiniment lointain, nous sommes aussi fondés à admettre comme très probable que nous parviendrons à un état où toutes les différences de température auront disparu que si nous suivions les états de l'Univers jusque dans l'avenir le plus éloigné. Cela par analogie avec le cas suivant : si nous savons que dans un gaz, à un instant donné, règne une répartition non uniforme et que ce gaz a été soustrait très longtemps à toute action extérieure, nous devons en conclure que, très longtemps auparavant, la répartition était uniforme et que le cas exceptionnel s'est produit. En d'autres termes, toute répartition non uniforme conduit, au bout d'une durée t_1 suffisamment longue, à une répartition quasi uniforme. Le processus inverse conduit, au bout du même temps t_1, à une répartition non uniforme. Ce dernier état lui-même étant pris comme état initial conduit, au bout du temps t_1, à une répartition uniforme [1]. »

[1] [30], pp. 121-122.

Interprétation probabiliste du second principe de la thermodynamique

Nous arrivons ainsi, par une voie toute naturelle, au mémoire fondamental sur l'interprétation probabiliste du second principe de la thermodynamique qui constitue indiscutablement l'un des sommets de l'œuvre de Boltzmann (*Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht*, 11 octobre 1877, [31]).

Le texte original, dont nous essayerons ici de suivre aussi fidèlement que possible les grandes lignes est, soit dit en passant, beaucoup plus clair et plus suggestif que l'exposé correspondant de la *Gastheorie*.

Boltzmann énonce ainsi le principe qu'il s'agit de mettre en œuvre :

« L'état initial d'un système sera, dans la plupart des cas, un état très peu probable et le système tendra toujours vers des états plus probables, jusqu'à ce qu'il parvienne à l'état le plus probable, c'est-à-dire à l'état d'équilibre thermodynamique. Si nous appliquons cela au second principe de la thermodynamique, nous pourrons identifier la grandeur que l'on a coutune d'appeler l'entropie avec la probabilité de l'état correspondant. Considérons donc un système de corps qui soit isolé [et dont l'état ne se modifie que par interaction entre les corps qui le constituent]. Dans une telle transformation, en vertu du second principe de la thermodynamique, l'entropie totale du système ne peut qu'augmenter. Dans notre interprétation actuelle, cela ne signifie pas autre chose que le fait que la probabilité de l'état d'ensemble des corps du système doit aller constamment en augmentant : le système ne peut passer que d'un état à un état plus probable [1]. »

Boltzmann considère le cas le plus simple qui est celui d'un gaz renfermé dans un récipient à parois parfaitement élastiques et dont les molécules sont des sphères élastiques, ou des centres de force ayant un rayon d'action déterminé. L'application du calcul des probabilités à ce

[1] [31], pp. 165-166.

cas n'est déjà pas facile : le nombre des molécules est très grand, sans être infini au sens mathématique du terme ; au contraire, le nombre des vitesses différentes que peut prendre une molécule doit être considéré comme mathématiquement infini. Cette dernière circonstance rend le calcul beaucoup plus difficile. Aussi Boltzmann, fidèle à son intuition finitiste, commence-t-il par le cas où les vitesses possibles (ou si l'on veut les énergies cinétiques possibles) sont en nombre fini, quitte à passer ensuite à la limite.

Faisant ainsi avant la lettre une hypothèse des quanta, Boltzmann considère des molécules en nombre n dont l'énergie cinétique ne peut prendre que des valeurs discrètes et finies croissant en progression arithmétique, savoir :

$$0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon\ \ldots,\ p\varepsilon.$$

Par définition, *un état* du système *(Zustandsverteilung)* est déterminé par les nombres

$$n_0,\ n_1,\ n_2\ \ldots\ n_p$$

des molécules ayant respectivement les énergies cinétiques :

$$0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ \ldots\ p\varepsilon,$$

l'énergie cinétique totale restant constante et égale à $L = \lambda\varepsilon$.

Les entiers n_0, n_1, n_2 ... n_p sont liés par les relations :

$$(1)\quad \begin{cases} n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n, \\ n_1 + 2n_2 + \ldots + pn_p = \lambda. \end{cases}$$

Boltzmann appelle au contraire *complexion* une répartition où *chaque molécule* (supposée par conséquent identifiable) possède une énergie cinétique donnée.

Il est clair que le *nombre des complexions* qui correspondent à un même état du système est égal au nombre des permutations dont les éléments de cet état sont susceptibles, c'est-à-dire à

$$P = \frac{n!}{n_0!\,n_1!\ldots n_p!}$$

Boltzmann qualifie ce nombre de *permutabilité* de l'état correspondant. Il admet que P mesure la probabilité (relative) de cet état, ce qui revient à postuler que *toutes les complexions sont également probables*. Un état est alors d'autant plus probable qu'il lui correspond un plus grand nombre de complexions.

A titre d'illustration de ce qui précède, Boltzmann détaille l'exemple d'un système constitué de 7 molécules, ayant une énergie cinétique totale de 7ε et pouvant avoir individuellement les énergies cinétiques

$$0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots 7\varepsilon.$$

Il y a alors 15 états et 1 716 complexions réalisables. L'état le plus probable, que l'on peut représenter par le symbole

$$0\,0\,0\,1\,1\,2\,3$$

est caractérisé par :

$$n_0 = 3 \qquad n_1 = 2 \qquad n_2 = n_3 = 1, \text{ les autres } n_i \text{ étant nuls.}$$

La permutabilité correspondante a pour valeur

$$\frac{7!}{1!\,1!\,2!\,3!} = 420.$$

Elle est 60 fois supérieure à celle de l'état

$$000\,000\,7$$

où une seule molécule aurait l'énergie cinétique 7ε.

En général, l'état le plus probable est celui pour lequel log P est maximum ; ou, si l'on veut, l'état où la somme :

$$\log [n_0!] + \log [n_1!] + \ldots + \log [n_p!]$$

est *minimum*, les n_i étant liés par les relations (1).

Passons sur la détermination de ce minimum pour en venir au cas où les énergies cinétiques se transforment de façon continue.

ε étant une quantité très petite, soient

n_0 le nombre des molécules dont l'énergie cinétique est comprise entre 0 et ε,

n_1 le nombre des molécules dont l'énergie cinétique est comprise entre ε et 2ε,

n_2 le nombre des molécules dont l'énergie cinétique est comprise entre 2ε et 3ε,

et ainsi de suite indéfiniment.

Posons :

$$n_0 = \varepsilon f(0) \qquad n_1 = \varepsilon f(\varepsilon) \qquad n_2 = \varepsilon f(2\varepsilon) \ldots$$

La probabilité (relative) de l'état défini par les nombres $n_0, n_1, n_2 \ldots$ sera, comme dans le cas fini et discontinu, mesurée par le nombre de permutations dont les éléments de cet état sont susceptibles, soit :

$$\frac{n!}{n_0!\,n_1!\,n_2!\ldots}$$

Remplaçant alors les $n_i!$, à un facteur constant près[1], par $\left(\frac{n_i}{e}\right)^{n_i}$, cette probabilité sera maximum si la somme

$$M = n_0 \log n_0 + n_1 \log n_1 + n_2 \log n_2 + \ldots - n$$

est elle-même *minimum*, et cela sous les conditions :

$$\begin{cases} n = n_0 + n_1 + n_2 + \ldots \\ L = \varepsilon n_1 + 2\varepsilon n_2 + 3\varepsilon n_3 + \ldots \end{cases}$$

où L est l'énergie cinétique totale du système.

Remplaçant les n_i par leurs valeurs, on trouve :

$$\begin{aligned} M = {} & \varepsilon\,[f(0) \log f(0) + f(\varepsilon) \log f(\varepsilon) + f(2\varepsilon) \log f(2\varepsilon) + \ldots] \\ & + \varepsilon \log \varepsilon\,[f(0) + f(\varepsilon) + f(2\varepsilon) + \ldots] - n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \varepsilon\,[f(0) + f(\varepsilon) + f(2\varepsilon) + \ldots], \\ L &= \varepsilon\,[\varepsilon f(\varepsilon) + 2\varepsilon f(2\varepsilon) + 3\varepsilon f(3\varepsilon) + \ldots]. \end{aligned}$$

Ou, compte tenu de la valeur de n :

$$M = \varepsilon[f(0) \log f(0) + f(\varepsilon) \log f(\varepsilon) + f(2\varepsilon) \log f(2\varepsilon) + \ldots] + n\,(\log \varepsilon - 1)$$

ε et n étant donnés, on peut substituer à la recherche du minimum de M celle de M′, soit :

$$M' = \varepsilon\,[f(0) \log f(0) + f(\varepsilon) \log f(\varepsilon) + f(2\varepsilon) \log f(2\varepsilon) + \ldots].$$

Faisant alors tendre ε vers zéro et appelant x la variable indépendante, on obtient à la limite :

$$\begin{cases} M' = \displaystyle\int_0^\infty f(x) \log f(x)\, dx, \\ n = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx, \\ L = \displaystyle\int_0^\infty x f(x)\, dx. \end{cases}$$

[1] Cette substitution suppose que les n_i sont de grands nombres.

En désignant par k et h deux multiplicateurs, on est conduit à exprimer l'*extremum* de M′ lié par les relations exprimant n et L par :

$$\delta \int_0^\infty [f(x) \log f(x) + kf(x) + hxf(x)]\, dx = 0,$$

ou

$$\int_0^\infty [\log f(x) + 1 + k + hx]\, \delta f(x)\, dx = 0,$$

dont la solution est

$$f(x) = Ce^{-hx} \qquad \text{avec} \qquad C = e^{-(k+1)}.$$

La seconde variation de M′ est positive, car $f(x)$ est essentiellement positive. M′ est donc effectivement *minimum*.

Dans l'état le plus probable défini par le minimum de M′, c'est-à-dire par le maximum de la permutabilité P, la probabilité (relative) pour que l'énergie cinétique d'une molécule soit comprise entre x et $x + dx$ sera donc

$$Ce^{-hx}\, dx.$$

On voit que l'on retombe sur la distribution de Maxwell : *l'état le plus probable correspond à l'état d'équilibre thermodynamique.*

Au lieu de l'énergie cinétique, on peut considérer les différentes composantes u, v, w de la vitesse d'une molécule. La grandeur qui doit être *maximum* dans l'état le plus probable sera alors :

$$\Omega = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v, w) \log f(u, v, w)\, du\, dv\, dw$$

sous les conditions :

$$\begin{cases} n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v, w)\, du\, dv\, dw, \\ L = \dfrac{m}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + v^2 + w^2) f(u, v, w)\, du\, dv\, dw. \end{cases}$$

Boltzmann généralise la définition de cette fonction Ω à un gaz constitué de différentes sortes de molécules complexes sous la forme :

$$\Omega = -\Big[\int\int\cdots f(q_1,\ldots q_r, p_1,\ldots p_r)\log f(q_1,\ldots q_r, p_1,\ldots p_r)$$
$$dq_1,\ldots dq_r\, dp_1,\ldots dp_r + \int\int\cdots f(q'_1,\ldots q'_s, p'_1,\ldots p'_s)$$
$$\log f(q'_1,\ldots q'_s, p'_1,\ldots p'_s)\, dq'_1,\ldots dq'_s\, dp'_1,\ldots dp'_s + \ldots\Big],$$

où $q_1,\ldots q_r$ sont les coordonnées généralisées et $p_1,\ldots p_5$ les moments conjugués correspondants pour les molécules de la première sorte, $q'_1,\ldots q'_s$ et $p'_1,\ldots p'_s$ les quantités analogues pour les molécules de la seconde sorte, et ainsi de suite.

Il s'agit alors d'expliciter la relation entre l'entropie et la grandeur Ω, laquelle représente, à un facteur près, le logarithme de la probabilité de l'état correspondant.

Boltzmann se borne « au cas le plus simple et le plus clair », celui d'un gaz monoatomique en l'absence de forces extérieures. La formule précédente se réduit alors à :

$$\Omega = -\int\int\int\int\int\int f(x,y,z,u,v,w)\log f(x,y,z,u,v,w)\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw,$$

où $f\,dx\,dy\,dz\,du\,dv\,dw$ représente le nombre des molécules dont les coordonnées et les vitesses sont comprises entre les limites x et $x+dx,\ldots$ w et $w+dw$, l'intégrale étant prise de $-\infty$ à $+\infty$ pour les composantes de la vitesse et dans tout le volume occupé par le gaz pour les coordonnées.

Si l'état initial du gaz n'est pas un état d'équilibre thermodynamique, la grandeur Ω ne cesse de croître jusqu'à ce que l'équilibre thermodynamique soit atteint.

Calculons Ω *en l'état d'équilibre thermodynamique.*

En cet état

$$f = \frac{N}{V\left(\frac{4\pi T}{3m}\right)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{3m}{4T}(u^2+v^2+w^2)},$$

où N est le nombre total des molécules,

V le volume total occupé par le gaz,

T l'énergie cinétique moyenne d'une molécule,

m la masse d'une molécule.

A cette valeur de f correspond :

$$\Omega = \frac{3N}{2} + N\log\left[V\left(\frac{4\pi T}{3m}\right)^{\frac{3}{2}}\right] - N\log N = \text{const} + N\log\left[VT^{\frac{3}{2}}\right].$$

D'autre part, le principe de l'énergie s'écrit, si dQ est la chaleur reçue par le gaz et p la pression à la surface du volume V occupé par le gaz :

$$dQ = NdT + pdV, \qquad \text{avec} \qquad pV = \frac{2}{3}NT.$$

D'où l'entropie :

$$\int \frac{dQ}{T} = N \log T + \frac{2}{3} N \log V + \text{const} = \frac{2}{3} N \log \left[VT^{\frac{3}{2}} \right] + \text{const}.$$

Et, avec un choix convenable des constantes :

$$\boxed{\int \frac{dQ}{T} = \frac{2}{3}\Omega}$$

Boltzmann conclut :

« Il est bien connu que, lorsqu'un système de corps subit des transformations purement réversibles, l'entropie totale du système demeure constante. Si, au contraire, parmi les transformations subies, il en est de non réversibles, l'entropie du système augmente nécessairement... En vertu de la relation précédente, il en est de même de $\Sigma\Omega$, mesure de la permutabilité pour l'ensemble des corps. *Cette mesure de la permutabilité est donc une grandeur qui, en l'état d'équilibre thermodynamique, coïncide avec l'entropie, à un facteur et à une constante près, mais qui possède également un sens pendant tout processus irréversible, au cours duquel elle croît de façon continue.*

» On en déduit immédiatement deux propositions : la première se rapporte à un système de corps qui subit différentes transformations, dont certaines au moins sont irréversibles... Si, au début et à la fin du processus, le système était en état d'équilibre thermodynamique, l'entropie totale de ce système peut être immédiatement calculée ; elle est égale chaque fois aux deux tiers de la mesure de la permutabilité. Cette première proposition exprime alors que l'entropie totale est toujours supérieure, après les transformations subies, à sa valeur initiale ; cela vaut aussi, naturellement, pour la mesure de la permutabilité. La seconde proposition se rapporte à un gaz qui subit une transformation sans que l'état initial et l'état final aient besoin d'être des états d'équilibre thermodynamique. On ne peut donc calculer l'entropie du gaz en l'état initial et en l'état final, mais on peut toujours calculer la grandeur que nous avons appelée mesure de la permutabilité ; et ici encore sa valeur finale

est nécessairement supérieure à sa valeur initiale. On peut vérifier également que cette dernière proposition s'étend sans difficulté à un système constitué de plusieurs gaz, et aussi au cas où les molécules sont polyatomiques et soumises à l'action de forces extérieures [1]. »

Etendant ce résultat par induction, Boltzmann en vient à formuler le principe général suivant :

« Soit un système quelconque accomplissant une transformation arbitraire, sans que l'état initial et l'état final soient nécessairement des états d'équilibre ; dans ces conditions, la mesure de la permutabilité de l'ensemble des corps du système augmentera constamment au cours du processus, et pourra au plus demeurer constante dans les processus réversibles infiniment voisins de l'équilibre thermodynamique [2]. »

Boltzmann a bien conscience d'avoir aperçu ici un principe très général, et considère comme vraisemblable que ce principe ne doit pas être limité au cas des gaz, mais s'étendre aussi au cas des solides et des fluides, encore que le traitement mathématique exact de ces derniers cas semble devoir se heurter à de grandes difficultés.

[1] [31], pp. 217-218.
[2] *Ibid.*, p. 218.

Sur la courbe H

Ce sont les objections qui lui avaient été faites par l'école anglaise (Burbury, Culverwell) qui ont incité Boltzmann à imaginer ce qu'il a appelé la « *courbe H* » et, de façon plus précise, les modèles — inspirés par l'exemple de jeux de hasard — permettant d'illustrer le théorème H. Nous trouverons ici un nouvel exemple de la souplesse et de l'ingéniosité de la dialectique boltzmannienne.

Culverwell reprenait au fond l'objection de réversibilité. Boltzmann réplique que si l'on suivait ce raisonnement, cela reviendrait à dire que la séparation de l'oxygène et de l'azote est aussi probable que leur mélange. Il rappelle que le théorème H, aussi bien que le second principe de la thermodynamique, n'est qu'une proposition de probabilités. On ne saurait démontrer, à l'aide des seules équations du mouvement, que la grandeur H doit décroître constamment ; on peut seulement établir, sous réserve que l'état initial n'ait pas été spécialement choisi, que la probabilité de décroissance de H est toujours supérieure à sa probabilité de croissance.

Nous suivons ici tout d'abord un mémoire de Boltzmann *On certain Questions of the Theory of Gases* paru en anglais dans *Nature* en 1895 [36].

Boltzmann considère un récipient à parois parfaitement lisses et élastiques, contenant un nombre donné de molécules de gaz qui s'y meuvent pendant un temps infiniment long. Tous les mouvements *réguliers* (comme par exemple celui où toutes les molécules se déplaceraient dans un plan donné) sont exclus. Pendant la plus grande partie du temps la grandeur H sera très approximativement égale à sa valeur minimum (H_{min}). Si nous construisons la courbe H, c'est-à-dire le diagramme où le temps est porté en abscisse et la valeur de H en ordonnée, la grande majorité des ordonnées seront très voisines de H_{min}. Mais comme de grandes valeurs de H ne sont pas mathématiquement impossibles, mais seulement très peu probables, la courbe H aura, en très petit nombre,

des sommets ou des maxima s'élevant nettement au-dessus de H_{min}.

« Considérons une certaine ordonnée $H_1 \gg H_{min}$. Deux cas sont possibles. H_1 peut d'abord être très voisin d'un sommet, en sorte que H décroît aussi bien dans la direction positive que dans la direction négative de l'axe des temps. Dans le second cas, H_1 est situé dans une partie montante ou descendante de la courbe ; ainsi les ordonnées seront supérieures d'un côté, inférieures de l'autre côté à H_1. Mais du fait que l'existence de sommets élevés est extrêmement peu probable, le premier cas ci-dessus sera le plus probable et si nous choisissons au hasard sur la courbe une ordonnée de grandeur donnée H_1, il n'est pas certain, mais il est très probable, que les ordonnées décroîtront si nous nous déplaçons dans les deux sens de l'axe des temps.

» Nous considérons alors, avec Culverwell, un état donné du gaz. Si en cet état H est supérieur (nettement) à H_{min}, il n'est pas certain, mais très probable, que H décroîtra et atteindra finalement une valeur très voisine de H_{min}... Si, dans un état intermédiaire, nous renversons le sens de toutes les vitesses, nous obtiendrons un cas exceptionnel où H croît pendant un certain temps, pour décroître ensuite. Mais l'existence de tels cas exceptionnels ne détruit pas notre théorème. Au contraire, la théorie des probabilités elle-même montre que la probabilité de tels cas n'est pas nulle, mais extrêmement petite.

» Donc Burbury se trompe, quand il admet que H croît en autant de cas où il décroît, et Culverwell se trompe aussi lorsqu'il dit que tout ce qu'on peut démontrer est que si l'on considère toutes les valeurs de dH/dt correspondant aux configurations qui se rapprochent d'un état permanent, et de même toutes celles correspondant aux configurations qui s'éloignent de cet état, et qu'on en fasse la moyenne, celle-ci sera négative. Nous avons montré au contraire que H peut avoir tendance à décroître pour les deux genres de configurations. Ce que j'ai démontré dans mes propres mémoires, c'est qu'il est extrêmement probable que H soit très voisin de sa valeur minimum : s'il est (nettement) supérieur à ce minimum, il peut augmenter ou diminuer, mais la probabilité de le voir décroître est toujours plus grande. Ainsi, si j'obtiens une certaine valeur de dH/dt, ce résultat ne vaudra pas pour chaque élément dt, mais sera seulement une moyenne. Mais plus le nombre des molécules sera élevé, plus faible sera l'intervalle dt pour lequel le résultat est valable [1]. »

Et Boltzmann s'emploie à montrer que des circonstances tout analogues se produisent dans le cas beaucoup plus simple du jeu de dés.

On jette un dé au cours d'une série indéfinie d'épreuves.

[1] [36], pp. 540-541.

Soit A_1 le nombre de fois où le dé retombe sur la face 1 au cours des $6n$ premiers coups.

Soit A_2 le nombre de fois où le dé retombe de même sur la face 1 parmi les coups compris entre le second et le $(6n+1)^{\text{ième}}$ coup inclus, et ainsi de suite.

Construisons la « *courbe P* » dont les points ont pour abscisses :

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$$

et pour ordonnées :

$$y_1 = \left(\frac{A_1}{n} - 1\right)^2, \; y_2 = \left(\frac{A_2}{n} - 1\right)^2, \text{ etc...}$$

Si n est un grand nombre, la grande majorité des ordonnées y_1 sera très petite. Mais la courbe P (comme la courbe H) n'en présente pas moins des sommets dépassant nettement son niveau ordinaire très bas au-dessus de l'axe des x.

Considérons par exemple les « *points B* » de la courbe P dont l'ordonnée est exactement égale à l'unité, c'est-à-dire que pour chaque point B :

$$A = 2n.$$

Ces points B correspondent aux cas où le dé est tombé $2n$ fois sur la face 1 dans une série de $6n$ coups. Si n est très grand, la chose n'est pas impossible, mais extrêmement improbable.

Soit v un nombre $< n$ [1]. Déplaçons-nous, à partir de chaque point B, sur l'axe des abscisses et dans le sens positif, de la quantité $6v/n$. Nous atteindrons ainsi, probablement, un point de la courbe P d'ordonnée < 1. On pourrait penser qu'un même déplacement de $6v/n$ dans le sens négatif conduirait probablement à un point d'ordonnée > 1. Mais cela est inexact : quel que soit le sens du déplacement, l'ordonnée décroîtra probablement.

Nous pouvons même calculer cette diminution probable de y. Nous avons vu que, pour chaque point B, $A = 2n$ (c'est-à-dire que le dé retombe $2n$ fois sur $6n$ sur la face 1). Un déplacement de $6v/n$ élimine $6v$ des coups initiaux et en introduit $6v$ nouveaux. Parmi les coups éliminés il y avait probablement $2v$ cas de sortie de la face 1, et parmi les coups nouveaux v seulement. Donc la diminution de A est v et celle de y est par suite, approximativement $2v/n$. Il en résulte :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2v/n}{6v/n} = -\frac{1}{3}.$$

[1] Sauf erreur, v lui-même doit rester un grand nombre.

L'expression précédente n'est pas un quotient différentiel ordinaire, mais seulement une valeur moyenne du quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour tous les points B d'ordonnée 1. La courbe P n'a nulle part de tangente définie.

Dans un mémoire *Über die sogenannte H-Curve*, daté de Noël 1897 et publié dans les *Mathematische Annalen* [44], Boltzmann reprend en détail un modèle tout à fait analogue. Il s'agit cette fois du tirage de boules blanches ou noires extraites d'une urne où elles se trouvent en nombre égal, en remettant après chaque tirage la boule dans l'urne.

On effectue dans une même série $(2N+1)$ tirages désignés par :

$$Z_{-N}, Z_{-N+1}, \ldots Z_0, Z_1, \ldots Z_N.$$

Soit n un entier $< 2N+2$. On désigne par a_k le nombre de boules blanches tirées au cours des n tirages $Z_k, Z_{k+1}, \ldots Z_{k+n-1}$ où k est un des entiers positifs, négatifs ou nul compris entre $-N$ et $N+1-n$ inclus.

Portons en abscisse, pour chaque valeur de k,

$$OA_k = x = k/n$$

et en ordonnée :

$$A_k B_k = y = \left| 1 - \frac{2a_k}{n} \right|.$$

On obtient ainsi une série de $2N+2-n$ points discrets $B_{-N}, \ldots, B_{N+1-n}$. n d'une part, N/n d'autre part, sont supposés très grands devant l'unité.

Boltzmann appelle *courbe H de cette loterie*[1] le lieu des points B_k. Cette courbe, sans être définie par une formule analytique, peut cependant être construite, en procédant réellement à $(2N+1)$ tirages.

Du fait que n est un grand nombre, a_k diffère très peu de $n/2$ et la courbe H se tient au voisinage immédiat de l'axe des x. Mais si d'autre part N est choisi suffisamment grand, la courbe présentera des bosses *(Buckel)* où elle s'éloignera de l'axe des x d'une quantité finie.

Si par exemple $N = 1\,000 \cdot 2^n$, il y aura 2 000 chances pour qu'au cours des $2N+1$ tirages de Z_{-N} à Z_N n boules noires sortent consécutivement. Si k est l'indice du premier tirage de cette série, nous aurons $a_k = 0$ et par suite $A_k B_k = 1$. De la même façon, il y aura 2 000 chances pour la sortie de n boules blanches consécutives, avec $A_k B_k = 1$. Donc, dans une série de $2N+1$ tirages, il y aura au total 4 000 bosses de la plus grande hauteur possible, savoir l'unité. Il y aurait un nombre beaucoup

[1] Il s'agit ici évidemment d'un modèle et non de la courbe de la grandeur H au sens de la théorie des gaz, dont il sera parlé plus loin.

plus grand de bosses moins élevées, mais s'écartant encore de l'axe des x d'une quantité finie.

Cette courbe H, en dépit de sa continuité, ne possède pas de tangente au sens strict. Si, par exemple, k augmente d'une unité, on passe du point B_k au point B_{k+1} et l'abscisse augmente de $1/n$. Le tirage Z_k est éliminé au profit du tirage Z_{k+n}. Si des boules de même couleur sortent dans ces tirages, y ne change pas. La droite $B_k B_{k+1}$ est alors parallèle à l'axe des x. Si au contraire les boules tirées en Z_k et Z_{k+n} sont de couleurs différentes, a_k varie d'une unité, y varie de $2/n$ et la droite $B_k B_{k+1}$ fait avec Ox un angle dont la tangente est 2.

Toutefois, dans la grande majorité des cas, la corde $B_k B_{k+l}$ tend vers une limite que Boltzmann appelle *quasi tangente*, si l est grand devant l'unité, tout en étant $\ll n$.

Si, par exemple, $A_k B_k = 1$ (ce qui correspond aux sommets les plus élevés possibles) a_k est égal à 0 ou 1. Considérons le premier cas où $a_k = 0$, c'est-à-dire qu'aucune boule blanche n'est sortie au cours des tirages $Z_k, \ldots, Z_{k+n-1}$. Si nous passons au point B_{k+l}, nous éliminons les l tirages $Z_k, \ldots Z_{k+l-1}$ et introduisons à la place les tirages Z_{k+n}, $Z_{k+n+l-1}$. Nous savons que parmi les l premiers tirages aucune boule blanche n'était sortie. Dans les seconds, si l est un grand nombre, nous avons la probabilité de tirer $l/2$ boules blanches. Donc a_{k+l} sera probablement supérieur de $l/2$ à a_k, $y(B_{k+l})$ sera probablement inférieur à $y(B_k)$ de l/n et la corde $B_k B_{k+l}$ sera inclinée de 45° vers l'axe des x.

Il est évident qu'il revient au même de considérer les $(2N+1)$ tirages dans l'ordre $Z_{-N}, \ldots Z_N$ ou dans l'ordre inverse $Z_N, \ldots Z_{-N}$. Toute courbe H n'a pas besoin d'être rigoureusement symétrique par rapport à l'axe des y, mais en moyenne chaque courbe H court de la même manière suivant les x positifs ou négatifs.

Considérons alors une courbe J possédant cette symétrie par rapport aux x positifs et négatifs, mais ayant en outre une tangente en chaque point. Nous supposons que, comme la courbe H, la courbe J se déroule en grande partie au voisinage de l'axe des abscisses, mais qu'elle présente aussi des sommets isolés où elle s'écarte de cet axe d'une quantité finie. Considérons tous les points P de la courbe J ayant une même ordonnée particulièrement grande y_1. Si nous nous déplaçons, à partir de chacun de ces points, dans le sens positif ou négatif de l'axe des x, nous atteindrons en règle générale des points de plus faible ordonnée, en sorte que dy/dx sera positif ou négatif pour le même nombre de points P. La valeur moyenne de dy/dx pour tous les points P sera donc zéro.

Cela n'a pas lieu pour la courbe H. Considérons de même, sur cette courbe, l'ensemble des points Q de même ordonnée finie y_1. Soit $\Delta x = 1/n$ un déplacement à partir de chacun de ces points ; nous obtiendrons des

ordonnées tantôt supérieures et tantôt inférieures. Si au contraire $\Delta x = l/n$, où l est un grand nombre, $\Delta y/\Delta x$ sera presque toujours négatif et tendra vers une limite si l augmente constamment, en restant toutefois $< n$. Cela vaut aussi pour des déplacements dans le sens négatif, la limite étant la même en valeur absolue, mais de signe contraire.

Trois cas sont possibles pour un tel point Q de la courbe H : 1° Etre au sommet d'une bosse, en sorte que l'ordonnée décroisse des deux côtés. 2° Etre assez près d'un tel sommet pour que la courbe monte encore d'un côté ou de l'autre, si le déplacement est de $1/n$ ou d'un faible multiple de $1/n$. 3° Appartenir à une bosse dont la hauteur dépasse nettement y_1. Mais c'est une propriété caractéristique de la courbe H que la densité des bosses diminue si vite avec leur hauteur que ce troisième cas ne peut se produire que pour un très petit nombre de points.

Boltzmann croit ne pas se tromper en affirmant que les géomètres de profession mépriseront la courbe H *(der H-Curve spotten werden)*. Il déclare que son propos se borne, dans le modèle précédent, à montrer que l'on peut construire géométriquement des courbes ayant de semblables propriétés, et que par suite il n'y a aucune contradiction à attribuer des caractéristiques analogues à la courbe H, entendue cette fois au sens de la théorie des gaz considérés comme formés d'un nombre fini de molécules. La courbe H ressemble au modèle précédent, quand les chocs intermoléculaires ont une durée infiniment petite, en sorte que la grandeur H subit, du fait des chocs, des variations brusques ; elle ressemblerait, au contraire, à « *la courbe H de la loterie rendue continue* », si les chocs avaient une durée courte, mais finie [1].

Il n'est pas besoin de souligner la remarquable intuition géométrique dont Boltzmann donne ici la preuve, en imaginant ainsi des modèles où le jeu même du hasard permet de concevoir, sinon de traduire, les modalités de variation de la grandeur H de la théorie cinétique.

[1] Cf. [44], pp. 330-331.

L'objection Zermelo

Partant du célèbre mémoire de Poincaré sur les équations de la dynamique et le problème des trois corps (*Acta mathematica*, vol. 13, 1890, pp. 1-270, [8]) et plus précisément du théorème sur la quasi-périodicité des mouvements des systèmes mécaniques soumis à des forces dépendant des seules positions et dont ni les coordonnées, ni les vitesses ne croissent indéfiniment, Zermelo conteste la possibilité d'une illustration mécanique du second principe de la thermodynamique dans le cadre de la théorie cinétique, [1].

Zermelo reprend dans ce but la démonstration du théorème de Poincaré.

Il nous suffira de noter ici qu'un domaine g_0 de l'extension en phase (espace des coordonnées et des vitesses) se transforme avec le temps en des domaines g_t, qui constituent les phases successives de sa transformation et possèdent tous individuellement, en vertu du théorème de Liouville, la même étendue que g_0. L'ensemble de tous les domaines g_t ($t \geqq 0$) forme un domaine G_0, *l'avenir de* g_0, constitué de tous les états qui, en un temps fini, proviennent de g_0. Par hypothèse, ce domaine G_0 ne peut s'étendre à l'infini. Comme tout domaine g provenant de g_0 se transforme avec le temps, ainsi que toutes ses phases ultérieures, chacune se mutant en la suivante, leur ensemble G se transforme corrélativement et définit, à chaque instant t, *l'avenir de* g_t. Par définition même de l'avenir, cette transformation se traduit par la sortie d'anciens états, mais jamais par l'entrée de nouveaux. L'étendue Γ de G ne peut donc que diminuer ; comme, en vertu du théorème de Liouville, cette étendue demeure constante, cela prouve que les états sortants ne peuvent remplir une étendue finie, et que leur nombre s'évanouit devant celui des états qui restent. On peut donc qualifier d'exceptionnels les états sortants. Ainsi g_0, contenu en G_0, sera également contenu en quasi-totalité dans G_τ, τ étant une durée aussi grande qu'on le veut. Mais cela signifie qu'il y a toujours des états à l'intérieur de g_τ qui, plus tard, se transformeront

en états de g_0 et, leur correspondant inversement, des états de g_0 qui, au bout du temps τ, reviendront une fois en g_0. Ces états viendront remplir le domaine g_0 tout entier, sauf des états exceptionnels d'étendue totale (ou de mesure) nulle. Le processus peut se répéter indéfiniment.

Il suffit d'ailleurs que, sauf cas exceptionnels, les états de g_0 fassent retour une fois en g_0 pour qu'aucune fonction uniforme et continue des positions et des vitesses ne puisse augmenter constamment, à partir d'états initiaux remplissant un domaine d'extension en phase, si petit qu'il soit.

Et Zermelo conclut :

« *Dans un système composé d'un nombre quelconque de points matériels dont les accélérations ne dépendent que de leur position dans l'espace, il n'existe aucun processus irréversible à partir des états initiaux qui remplissent un domaine fini si petit qu'il soit* [d'extension en phase], *à la condition que ni les coordonnées ni les vitesses des points ne deviennent infinies.* »

Cette proposition s'étend à tout système mécanique satisfaisant aux équations canoniques d'Hamilton.

Zermelo rappelle qu'en théorie cinétique tous les processus sont des mouvements d'atomes ou de molécules, lesquels sont soit des points matériels, soit des agrégats de points matériels. On y considère exclusivement des « centres de force » ayant un potentiel indépendant des vitesses. On traite encore les molécules comme des sphères ou plus généralement des solides élastiques dont on étudie les collisions. Dans toutes ces hypothèses, le théorème précédent exclut les processus irréversibles, sauf en cas de conditions initiales singulières en vertu desquelles, dans G_0, les coordonnées de molécules ou leurs vitesses pourraient devenir infinies (autrement que sous l'effet d'une translation rectiligne uniforme). Mais le cas «éloignement à l'infini» est exclu par les conditions aux limites et l'autre, «vitesses infinies», par le principe de l'énergie.

Pour conserver au second principe une portée générale, il serait nécessaire d'admettre qu'en dépit de leur faible nombre, les états initiaux conduisant à des processus irréversibles soient seuls réalisés dans la nature, tandis que les autres, mathématiquement beaucoup plus probables, ne pourraient se produire.

Bien qu'une telle hypothèse soit formulable, elle correspond bien peu au sentiment de causalité et à l'esprit de l'interprétation mécanique des phénomènes naturels, qui nous oblige à supposer réalisables tous les états initiaux imaginables, et *a fortiori* ceux qui, constituant l'immense majorité, ne s'écartent des états réalisables qu'aussi peu que l'on veut. En outre, aucune loi de la nature ne concerne de grandeurs ou de processus rigoureusement exacts, lesquels seraient impossibles à observer, et toute loi s'accompagne nécessairement de latitudes, d'approximations

et de probabilités, tandis que les singularités n'apparaissent que comme cas limite d'une abstraction. L'hypothèse dont il s'agit serait si seule de son espèce en physique que personne ne pourrait s'en déclarer satisfait.

Le fait que l'ensemble des états imaginables ne peut conduire au second principe provient aussi de ce que, par renversement des vitesses de toutes les molécules à un instant donné, le déroulement temporel d'un processus quelconque doit pouvoir s'inverser. Cette objection, déclare Zermelo, a été faite depuis longtemps à l'égard d'une formulation mécanique des processus irréversibles et a encore donné lieu, au cours de l'hiver 1894-1895, à la suite d'une communication de Culverwell, à une discussion étendue dans *Nature* [1], sans avoir conduit à une conclusion satisfaisante. On n'a pas démontré que l'état physique d'un gaz — qui est seul en cause — doive être nécessairement le même pour des vitesses opposées de toutes les molécules, seul cas où on pourrait parler d'un véritable renversement du processus, et la possibilité reste ouverte qu'au moins pour un domaine fini d'états initiaux une augmentation continue de l'entropie se produise. Aucune de ces deux objections ne peut être faite à l'égard de l'application du théorème de Poincaré.

Zermelo n'est donc pas convaincu par l'objection Loschmidt, et ne retient que la sienne, plus savante et plus subtile.

Zermelo ajoute encore qu'il ne serait pas raisonnable de tenter d'échapper à ses propres conclusions par des modifications de détail, comme de rendre fonction à la fois des positions et des vitesses les actions mutuelles des molécules. Il conclut qu'il est impossible de déduire le second principe de la théorie cinétique en son état actuel, et qu'il est également impossible de démontrer que la loi de répartition des vitesses de Maxwell-Boltzmann doive s'instituer nécessairement comme état stationnaire au bout d'un certain temps.

Réplique de Boltzmann

Mis en présence de cette nouvelle objection, Boltzmann ne tarde pas à répliquer avec sa vigueur habituelle [39].

Il rappelle tout d'abord qu'avec Clausius et Maxwell et d'autres encore, il a répété inlassablement que les propositions de la théorie des gaz avaient le caractère de vérités statistiques. Ainsi la loi de répartition des vitesses de Maxwell n'est en aucune façon un théorème de mécanique ordinaire démontrable à partir des seules équations du mouvement ; elle possède seulement la plus grande probabilité et, pour un grand nombre de molécules, tous les autres états sont comparativement si peu pro-

[1] Voir *Nature*, 51, 1894-1895, et 52, 1895 ; en particulier cf. Burbury, [5], et Culverwell, [2].

bables qu'ils n'interviennent pratiquement pas. Le second principe de la thermodynamique est, du point de vue de la théorie cinétique, un pur théorème de probabilité.

« Le mémoire de Zermelo, déclare Boltzmann avec quelque amertume de l'isolement où il était tenu, montre que mes travaux n'ont pas été compris ; malgré cela je dois me réjouir de cette publication comme de la première preuve que mes recherches pourront être gratifiées en Allemagne de quelque attention [1]. »

Et Boltzmann poursuit :

« Le théorème de Poincaré exposé au début par Zermelo est évidemment exact, mais l'application qu'il en fait à la thermodynamique ne l'est pas.

» J'ai déduit la démonstration de la loi de répartition des vitesses de Maxwell du théorème suivant lequel une certaine grandeur H (qui, dans une certaine mesure, traduit l'écart de la répartition régnante par rapport à celle de Maxwell) ne peut, conformément au calcul des probabilités, que diminuer [avec le temps] pour un gaz enfermé dans un récipient fixe. Les modalités de cette diminution apparaîtront le plus clairement si, comme je l'ai fait [36], on porte le temps en abscisse et en ordonnées les valeurs correspondantes de la grandeur H comptées au-dessus de sa plus petite valeur H_{min}, en construisant ce que j'appelle la courbe H.

» Si, comme cela résulte formellement de la démonstration exposée au paragraphe 5 de ma *Gastheorie*, on considère comme infini le nombre des molécules et qu'on laisse se poursuivre le mouvement très longtemps, on obtient dans la très grande majorité des cas une courbe qui s'approche asymptotiquement de l'axe des abscisses. Le théorème de Poincaré, comme il est facile de le voir, ne s'applique pas à ce cas.

» Si, au contraire, la durée du mouvement augmente indéfiniment, mais que le nombre des molécules, tout en étant très grand, n'est pas véritablement infini, la courbe H présente un autre caractère. Elle court, comme je l'ai montré à l'endroit cité dans *Nature*, presque toujours très près de l'axe des abscisses. Elle ne s'élève que très rarement à une hauteur sensible au-dessus de cet axe, faisant ce que nous appellerons une bosse *(Buckel)* et la probabilité d'une telle bosse diminue rapidement lorsque sa hauteur augmente. A chaque instant pour lequel les ordonnées de la courbe H sont très petites règne sensiblement la répartition de Maxwell ; mais des écarts sensibles par rapport à cette répartition se produisent dans les hautes bosses de la courbe H.

» Zermelo pense pouvoir conclure du théorème de Poincaré que seuls des états initiaux exceptionnels, dont le nombre est infiniment petit

[1] [39], p. 567.

devant celui de tous les états possibles, permettent de s'approcher toujours davantage de la loi de répartition de Maxwell, tandis que pour la grande majorité des états initiaux cette loi ne peut trouver place.

» Je ne pense pas que cela soit exact. C'est précisément à partir de certains états initiaux exceptionnels que la répartition de Maxwell ne peut jamais s'instituer (comme par exemple lorsque toutes les molécules sont placées initialement sur une droite perpendiculaire aux parois du récipient). Dans l'immense majorité des conditions initiales possibles, la courbe H présente le caractère décrit plus haut.

» Si l'état initial du gaz est situé sur une bosse extraordinairement élevée, c'est-à-dire s'il s'écarte radicalement de la répartition de Maxwell, l'état du gaz s'approchera par la suite avec une très haute probabilité de cette répartition et en restera infiniment voisin pendant un temps considérable. Sans doute peut-on, si on allonge encore la durée du mouvement, parvenir à une bosse encore plus haute de la courbe H et si cet allongement est suffisamment poussé, l'état primitif réapparaîtra [1]. »

Et nous voyons ici Boltzmann user de la même dialectique qu'à l'égard de l'objection de réversibilité, en retournant l'argumentation de son contradicteur :

« Zermelo a donc parfaitement raison quand il affirme que le mouvement est périodique au sens mathématique du terme, mais loin de contredire mes propositions, cette périodicité est bien davantage en parfaite harmonie avec celles-ci. Il ne faut pas oublier que la répartition des vitesses de Maxwell n'est en aucune façon un état où une position et une vitesse déterminées seraient assignées à chaque molécule et qui serait atteint si la position et la vitesse de chaque molécule tendaient asymptotiquement vers les valeurs ainsi assignées. Pour un nombre fini de molécules, la répartition de Maxwell ne peut jamais intervenir exactement, mais seulement avec une grande approximation. Cette répartition n'a en aucune manière le caractère d'une répartition exceptionnelle qui s'opposerait à des répartitions non maxwelliennes infiniment plus nombreuses ; au contraire, elle est caractérisée par le fait que la très grande majorité des répartitions possibles des vitesses possèdent les propriétés maxwelliennes et que le nombre des répartitions qui s'écartent de façon significative de celle de Maxwell est relativement infiniment petit. Alors que pour Zermelo le nombre des états conduisant finalement à la répartition de Maxwell devrait s'évanouir devant celui de tous les états possibles, je pense au contraire que l'immense majorité des états possibles sont « maxwelliens » et que le nombre des états qui s'écartent réellement de la répartition de Maxwell est infiniment petit [2]. »

[1] [39], pp. 566-569.
[2] *Ibid.*, pp. 569-570.

Le calcul des probabilités, poursuit Boltzmann, n'exclut nullement un retour à l'état initial ; au contraire, on doit s'y attendre si la durée du mouvement est suffisamment prolongée, car la probabilité d'un état tout proche de l'état initial est très petite, mais non infiniment petite. Zermelo n'a pas apporté la preuve que, dans le cas des gaz, la durée de la période au bout de laquelle l'état primitif se reproduit soit de longueur observable. Il est à peu près évident que si un trillion de sphères très petites, dotées chacune d'une grande vitesse, se trouvaient initialement réunies dans un angle du récipient à parois élastiques qui les contient, elles seraient réparties en peu de temps de façon quasi uniforme dans tout le récipient, et que le temps au bout duquel elles auraient compensé tous leurs chocs de façon à revenir dans leur situation initiale doit être si long qu'aucun observateur ne saurait le vivre. Boltzmann annexe à son mémoire un calcul de ce genre qui conduirait à une durée si énorme qu'elle lui en paraît rassurante. Si approché que soit ce calcul, il suffit à montrer que l'existence théorique d'une période au sens du théorème de Poincaré n'entraîne, dans le cas d'un gaz, aucune contradiction de la théorie cinétique avec l'expérience, car cette période échappe à toute observation. Les états que nous pouvons observer tombent tous dans l'intervalle entre le début et la fin de la période, où le théorème de Poincaré n'exclut pas l'existence d'états s'approchant autant qu'on le veut de la répartition de Maxwell. Le cas de Zermelo est l'un des nombreux exemples où un état théoriquement très peu probable peut être considéré comme pratiquement exclu.

Et, passant à l'attaque, Boltzmann compare Zermelo à un de ces joueurs de dés qui, ayant calculé que la probabilité n'est pas nulle d'obtenir le même point au cours de 1 000 épreuves consécutives et n'ayant jamais constaté la chose en pratique, conclurait que son dé est faux.

Boltzmann rappelle qu'aussi bien pour Helmholtz que pour Gibbs, le second principe est une proposition purement probabiliste. Gibbs en particulier était parvenu, dès 1875, par des considérations tout empiriques, à la conclusion que « l'impossibilité d'une diminution non compensée de l'entropie semblait devoir être réduite à une improbabilité ».

Généralisant le débat, Boltzmann demande que l'on ne confonde pas la théorie cinétique des gaz avec celle des centres de force, c'est-à-dire avec l'hypothèse que tous les phénomènes naturels se laissent expliquer par des forces centrales entre points matériels. Car la théorie des gaz [1] ne fait cette hypothèse ni pour le comportement de l'éther lumineux,

[1] Dans la généralité avec laquelle elle est traitée par Boltzmann dans la seconde partie de la *Gastheorie*.

ni même pour la constitution interne des molécules, lesquelles ne sont pas considérées comme des centres de force, mais (en ce qui concerne leurs interactions au cours des chocs) comme des systèmes justiciables des équations de Lagrange.

A l'encontre de la théorie des centres de force on pourrait invoquer la conséquence suivante du théorème de Poincaré : l'Univers entier, au bout d'un temps suffisamment long, devrait revenir à son état initial et par suite il devrait y avoir des époques où tous les processus se dérouleraient dans un sens inverse de l'actuel.

« Mais, déclare Boltzmann, des conclusions de ce genre me paraissent dépourvues de toute justification. Comment pourrions-nous, dès l'instant où nous quittons le domaine de ce qui est observable, décider si la durée d'existence de l'Univers ou le nombre des centres de force qu'il contient sont des infiniment grands d'ordre supérieur ? L'hypothèse selon laquelle l'espace du mouvement et l'énergie totale qu'il contient sont finis reste douteuse. Certes, l'hypothèse de la validité universelle du principe d'irréversibilité conduit de son côté, lorsqu'on l'applique à l'Univers pendant une durée infinie, à une conclusion à peine plus satisfaisante, savoir que lorsque tous les processus irréversibles seront épuisés, l'Univers continuera d'exister indéfiniment en l'absence de tout événement, ou disparaîtra graduellement faute d'événement. On serait aussi mal fondé à conclure de ce fait à la non-validité du principe d'irréversibilité, qu'à tirer argument du précédent contre l'atomistique. Toutes les objections élevées contre la représentation mécaniste sont par suite sans fondement et reposent sur des erreurs. Mais celui qui n'est pas capable de surmonter les difficultés qu'offre une formulation claire des propositions de la théorie des gaz doit suivre le conseil de Zermelo et se résoudre à renoncer entièrement à cette théorie [1]. »

L'objection Zermelo (suite)

Saisi de cette réplique de Boltzmann, Zermelo rappelle que le but de son mémoire était de souligner la contradiction entre une croissance continue de l'entropie et la périodicité du mouvement de systèmes mécaniques. Il reconnaît n'avoir pris connaissance qu'après coup des travaux de Boltzmann sur la théorie cinétique, mais conteste que ceux-ci soient de nature à rendre superflues les considérations générales qu'il avait lui-même développées.

Zermelo reconnaît que Boltzmann a raison de souligner que, pour un très grand nombre de molécules, la durée moyenne des périodes de

[1] [39], pp. 575-576.

Poincaré est trop longue pour se prêter à une observation directe. Mais il se refuse à considérer comme probant l'exemple numérique donné par Boltzmann, car il ne s'agit en pratique que de « l'état physique » d'un système, état qui peut être commun à de nombreuses combinaisons et donc se reproduire beaucoup plus vite.

Une fonction peut paraître augmenter de façon continue si la branche descendante de son diagramme périodique commence si tard qu'elle ne peut plus intervenir pratiquement. Mais il n'en résulte nullement qu'il puisse exister des fonctions dont la branche ascendante soit *toujours* la seule observable, comme cela devrait être le cas pour l'analogue mécanique de l'entropie d'un système arbitraire soustrait à toute action extérieure.

Le calcul des probabilités, correctement appliqué, ne semble devoir être ici d'aucun secours, car à chaque augmentation correspond une diminution ultérieure dont la probabilité est du même ordre de grandeur. La probabilité d'existence d'une propriété de l'état moléculaire ne peut, avec Poincaré, être définie que par l'étendue γ du domaine g constitué de tous les états possédant cette propriété, divisée par l'étendue totale Γ de tous les états possibles. En vertu du théorème de Liouville, cette probabilité est la même à tout instant.

Considérant la courbe H, Zermelo déclare n'avoir pu trouver comment Boltzmann, à partir de la définition de la fonction H, a pu établir les propriétés de cette courbe telles qu'il les décrit. Pour Zermelo, probabilité et durée d'un état ne sont pas identiques ; il concède cependant qu'il puisse exister des fonctions ayant les propriétés que Boltzmann attribue à la grandeur H. Mais il pense que la loi de Maxwell ne peut définir un état final stationnaire au sens strict, puisque de nouvelles bosses de la courbe H peuvent intervenir au bout d'un temps suffisamment long.

Ce n'est d'ailleurs pas la loi de répartition de Maxwell qui est ici en cause, mais seulement l'analogie entre les propriétés de la courbe H et le second principe de la thermodynamique, et c'est celle-ci que conteste Zermelo. Il ne suffit pas de montrer que tous les chocs finissent par conduire à un état d'équilibre durable ; il faudrait établir que la fonction H décroît constamment, ou du moins que des augmentations limitées, pratiquement imperceptibles, sont aussitôt abolies par de plus fortes diminutions. Zermelo conteste qu'on puisse le démontrer pour la fonction H ou même pour toute autre fonction. A chaque diminution constatée dans la branche descendante correspond une augmentation égale sur la branche ascendante qui la précède. Et même si les montées doivent s'effectuer plus rapidement que les descentes et par suite être moins probables — ce que rien dans les hypothèses faites ne permet d'affirmer

— elles devraient être d'autant plus abruptes et par suite intervenir avec le même poids.

Il semble que de l'avis de Boltzmann les états initiaux caractérisés par une grande valeur de H, soit $H_0 > H'$, doivent être en règle générale des maxima, pour éviter que la bosse qui leur correspond soit exagérément élevée et partant inutilement improbable. Zermelo déclare ne pouvoir se représenter la chose. Car si les intersections de la courbe avec une parallèle $H = H_0$ à l'axe des abscisses doivent être pour la plupart des maxima, cela pour toutes les valeurs $H_0 > H'$, où seront les autres points de la bosse qui ne sont pas des maxima ? Doivent-ils être en minorité par rapport aux maxima ? Il est clair que cela ne peut avoir de sens que si les maxima ne sont pas des points mathématiques et possèdent une certaine largeur, c'est-à-dire ici une certaine durée. La valeur de la fonction pour chaque état initial devrait donc durer un certain temps et traduire une sorte d'équilibre instable, alors que l'expérience montre que la transmission de la chaleur et le processus d'égalisation commencent d'autant plus vite que les différences de température sont plus élevées, c'est-à-dire que l'état initial est plus éloigné de l'état d'équilibre stable.

Boltzmann considère l'ensemble de la courbe H, c'est-à-dire l'ensemble des états à parcourir par le système, comme donné et se demande alors quelle est la probabilité d'un état initial donné à partir duquel le système se met en mouvement en l'absence de forces extérieures. Or, tout état peut être pris comme état initial. Le système, tant qu'il demeure isolé, parcourra la série des états P consécutifs à P_0, les états précédents n'étant là que pour compléter le tableau mathématique. Si le raisonnement de Boltzmann était fondé, c'est-à-dire si les états initiaux en cause étaient pour la plupart des maxima de la fonction H, cela devrait être vrai de tous les états pour lesquels $H > H'$.

« La courbe H devrait, à partir d'une certaine hauteur, *être constituée exclusivement de maxima*, ce qui est contradictoire, la fonction n'étant en aucune façon constante. Pour obtenir fût-ce une analogie purement empirique du principe de l'entropie, il ne suffirait en aucune manière de considérer l'état initial comme très peu probable, il faudrait encore introduire une *nouvelle hypothèse* selon laquelle initialement la courbe H possède un maximum ou vient d'en franchir un, mais cela voudrait dire, dès l'instant où on ne peut rendre cette hypothèse concevable à partir de la définition de l'état initial, que l'on suppose ce que l'on veut démontrer ; au lieu d'une explication, cela serait le renoncement à toute explication [1]. »

[1] Cf. Zermelo, [2], pp. 798-799.

Zermelo déclare n'avoir pu d'aucune manière se convaincre de ce que les considérations probabilistes de Boltzmann soient capables d'écarter le courant de pensée découlant du théorème de Poincaré et tendant à croire en l'impossibilité d'une explication mécanique des processus irréversibles, même lorsqu'on renonce à l'irréversibilité au sens strict au bénéfice d'une irréversibilité purement empirique. Il est clair, *a priori*, que le concept de probabilité n'a rien de temporel et que par suite on n'en peut rien déduire quant à la direction dans laquelle s'exécutent les processus.

Reprenant l'argument tiré du jeu de dés que Boltzmann lui avait opposé, Zermelo y substitue le suivant : Supposons que deux joueurs aient observé qu'un dé — utilisé pour la première fois — commence par tomber sur la face 1 environ 200 fois sur 600, mais que dans une seconde série de 600 coups la face 1 sorte déjà moins souvent et qu'enfin, en prolongeant suffisamment le jeu, on parvienne à constater une moyenne de un sixième. Le premier joueur trouve la chose normale, les lois de probabilités n'étant valables que pour des épreuves prolongées. Le second, au contraire, estime que le dé devait être initialement faux et qu'il est devenu normal, en se polissant par exemple à l'usage. Ce dernier avis est celui de Zermelo.

Pour Zermelo, il est impossible d'expliquer mécaniquement, sans de nouvelles hypothèses physiques, aussi bien les processus irréversibles isolés que le principe général d'irréversibilité, du moins en ce qui concerne leur déroulement dans le temps. Cela vaut en particulier pour l'équation de la chaleur et de la diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

laquelle, par nature, représente exclusivement des processus non réversibles. Les tentatives faites par Clausius, Maxwell et Boltzmann pour déduire cette équation de celles de la mécanique en liaison avec des considérations probabilistes ne peuvent conduire au but, car cette tâche est impossible, et un succès apparent ne pourrait reposer que sur des erreurs de déduction. Zermelo critique en particulier le concept boltzmannien d'inorganisation moléculaire.

En conclusion de son mémoire, Zermelo déclare que les grands succès remportés par la théorie cinétique des gaz dans l'explication des relations d'état ne permettent pas d'inférer de la possibilité d'étendre utilement le champ de celle-ci à l'étude des processus temporels. Car ce sont là deux domaines séparés. Et si cette théorie nous donne une image adéquate du premier, elle ne peut qu'échouer dans le second, à défaut de recourir à des hypothèses entièrement nouvelles.

Duplique de Boltzmann

Tout en marquant quelques points, la logique intransigeante de Zermelo méconnaissait en grande partie le contenu physique de la théorie cinétique et demeurait fermée à la pensée intuitive de Boltzmann. Doutant vraisemblablement de pouvoir convaincre ce nouvel interlocuteur, Boltzmann ne semble pas avoir désiré prolonger outre mesure le débat.

Pour expliquer mécaniquement le second principe, déclare Boltzmann dans sa duplique à Zermelo [40], il faut faire une hypothèse évidemment indémontrable, selon laquelle l'Univers conçu comme un système mécanique (ou tout au moins une partie très étendue de l'Univers qui nous entoure) est parti d'un état très peu probable et se trouve encore dans un état de ce genre. Si donc un système plus limité est brusquement isolé du reste de l'Univers, il se trouvera initialement — le plus souvent — dans un état très peu probable et tendra ensuite, tant qu'il demeurera isolé, vers un état plus probable ; il y a, au contraire, une improbabilité confinant à l'impossibilité pour que ce système soit, dès le début, en l'état d'équilibre thermodynamique et s'en écarte ensuite avec une diminution d'entropie.

A cet égard, et contrairement à l'opinion de Zermelo, l'état initial se distingue des états ultérieurs. Il est donc inexact de dire qu'un état arbitraire peut être pris pour état initial.

C'est dans ces conditions que l'entropie augmente, que les différences de température et de concentration s'égalisent, que la valeur initiale de H est telle que cette grandeur diminue presque sans exception au cours de toute durée observable, et que l'état initial et l'état final ne sont pas permutables. L'hypothèse faite constitue l'explication physique, conformément aux lois de la mécanique, du caractère particulier des états initiaux. Et il ne serait pas raisonnable de demander, avec Zermelo, d'expliquer à son tour le principe même de cette explication...

Si, au contraire, on ne fait aucune hypothèse sur l'état présent de l'Univers, on ne peut évidemment s'attendre qu'un système séparé de l'Univers, et dont l'état initial serait par suite entièrement arbitraire, se trouve soit avant, soit après, dans un état non probable. On devrait au contraire s'attendre que ce système se trouve, au moment de sa séparation, en l'état d'équilibre thermodynamique.

L'applicabilité du calcul des probabilités à un cas déterminé n'est jamais exactement démontrable. Par exemple, si sur 100 000 objets d'une certaine nature, 100 environ sont détruits par le feu en une année, on ne peut en conclure qu'il en sera de même l'année suivante. Au contraire, si les mêmes conditions demeurent pendant $10^{10^{10}}$ années, il arrivera souvent qu'en un jour 100 000 objets brûlent simultanément,

ou qu'une année entière s'écoule sans sinistre. Cela n'empêche pas les compagnies d'assurances de se fier au calcul des probabilités.

Le théorème de Poincaré, loin de s'opposer à l'application du calcul des probabilités aux systèmes de la théorie cinétique, plaide au contraire en faveur de celle-ci ; car ce calcul nous enseigne qu'au cours de très longues durées *(Aenonen)* il y aura des périodes relativement courtes pendant lesquelles l'entropie diminuera de façon sensible, et où par conséquent se produiront à nouveau des états organisés tout à fait semblables à l'état initial.

Si l'on considère l'exemple de deux gaz brusquement mélangés par suppression d'une cloison qui les séparait, il est clair que l'évolution d'un tel système s'effectuera irréversiblement puisque, de propos délibéré, on est parti d'un état très peu probable. Cet exemple vient illustrer la façon dont on peut concevoir l'état initial de l'Univers ; car si peu après le commencement de la diffusion, on isole une masse de gaz contenue dans un petit espace, l'évolution temporelle de cette masse présentera les mêmes particularités que celle du corps que nous avions précédemment supposé isolé de l'Univers.

Boltzmann rappelle ici avoir souvent mis en garde contre la tendance à se fier outre mesure aux *Gedankenbilder* qui vont au-delà de l'expérience, et souligne que les images auxquelles recourt la mécanique actuelle — en particulier en représentant les particules des corps comme des points matériels — doivent être considérées comme ayant un caractère provisoire.

C'est donc sous toutes réserves que chacun peut céder, si le cœur lui en dit, au désir de se faire une représentation particulière de l'Univers. On a le choix à cet égard entre deux conceptions : on peut tout d'abord admettre que l'Univers, dans son ensemble, se trouve actuellement dans un état très peu probable ; on peut au contraire soutenir que les périodes au cours desquelles de tels états se produisent sont relativement infinitésimales, comme la distance de Sirius devant les dimensions de l'Univers. Et Boltzmann développe ici la parabole des mondes individuels, que nous avons déjà eu l'occasion de citer d'après la *Gastheorie* [1] : dans chacun de ces mondes, un témoin vivant pourrait, selon le sens de l'évolution vers des états moins probables, ou au contraire vers des états plus probables, définir un passé et un avenir, c'est-à-dire une direction du temps, alors que la chose est impossible dans l'Univers global qui se trouve *presque partout* en l'état d'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire figé dans la mort.

Dans tous les faits d'expérience connus jusqu'ici, le modèle mécaniste

[1] Voir plus haut, pp. 173-174.

de la théorie cinétique s'accorde avec la formulation de Carnot-Clausius, qui est sans doute la plus simple. Ce modèle suggère toutefois la possibilité d'aborder certains phénomènes nouveaux, comme par exemple le mouvement de particules solides dans les fluides, le frottement et la transmission de chaleur dans les gaz raréfiés ; il peut d'autre part cesser de s'accorder avec le point de vue de Carnot-Clausius sur des questions incontrôlables (comme le comportement de l'Univers ou celui d'un système isolé pendant une durée indéfinie). Mais dans de telles différences de principe on ne saurait trouver aucun motif de renoncer à la théorie cinétique, comme le voudrait Zermelo : on ne doit pas s'attendre non plus à ce que cette théorie doive être fondamentalement modifiée. Ces divergences entre les deux points de vue macroscopique et mécaniste est pour Boltzmann une raison de plus d'en poursuivre parallèlement l'étude, de façon à élargir le champ de nos *Gedankenbilder*.

En annexe à cette duplique, Boltzmann rappelle avec raison à son contradicteur que depuis trente ans il a déjà eu l'occasion d'utiliser le théorème de Liouville pour définir une probabilité de présence indépendante de l'évolution temporelle. L'état maxwellien est le plus probable pour la simple raison qu'il peut être réalisé de la façon la plus variée. L'étendue totale du domaine formé par l'ensemble des états satisfaisant de façon approchée à la répartition des vitesses de Maxwell est donc beaucoup plus grande que l'étendue formée par tous les autres états.

Boltzmann précise encore n'avoir considéré la courbe H que pour illustrer la connexion entre probabilité et évolution temporelle des états. Le tracé qu'il a esquissé de cette courbe doit être pris *cum grano salis*, car celle-ci, présentant sur toute portion finie un très grand nombre de maxima et de minima, ne possède pas de tangente. Et renvoyant à ses articles de *Nature*, Boltzmann déclare que la courbe H serait sans doute mieux qualifiée « d'agrégat de nombreux points très rapprochés ou de petits traits horizontaux [1] ».

[1] [40], p. 586.

J'arrêterai ici cette analyse, sans étudier un mémoire essentiellement mathématique [41], où, revenant sur le théorème de Poincaré dont il ne conteste pas la validité, Boltzmann critique la démonstration de Zermelo, en lui reprochant notamment de n'avoir pas considéré la durée au bout de laquelle tous les systèmes occupant initialement un domaine ont quitté ce domaine, ce qui interdit de calculer une limite supérieure du temps de retour à l'état initial.

N'ayant en vue que la méthode et la dialectique boltzmanniennes, je n'entrerai pas davantage dans les détails de la critique approfondie faite par P. et T. Ehrenfest, [1], dans leur célèbre mémoire de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Je résumerai toutefois très brièvement la marche qu'ils ont suivie pour valider logiquement la thèse de Boltzmann sur la courbe H.

Soient r le nombre de degrés de liberté d'une molécule et N le nombre de celles-ci. A une phase déterminée (p, q) du modèle du gaz correspond un point de l'espace (Γ) à $2\,r\,N$ dimensions.

Cette même phase peut se représenter par N points de l'espace (μ) des molécules à 2 r dimensions. A chaque molécule est affecté un indice variant de 1 à N.

On divise, avec Boltzmann, l'espace (μ) en cellules égales ω_1, ω_2 ... très petites, mais non infiniment petites et contenant chacune un très grand nombre a_1, a_2 ... de molécules.

L'ensemble des a_i définit une *répartition d'état* Z.

A un point donné de l'espace (Γ) correspond une répartition déterminée Z. Mais inversement à une répartition donnée Z correspond un certain volume de (Γ) dit « *étoile Z* ».

Je passe sur le calcul, directement inspiré d'ailleurs des considérations analogues développées par Boltzmann dans son grand mémoire de 1877 sur le second principe, calcul qui permet d'écrire pour le volume de l'étoile Z :

$$[Z] = \frac{N!}{a_1!\, a_2! \ldots} \cdot [\omega]^N.$$

Toute fonction $f(Z)$ de la répartition d'état Z est une *fonction discontinue* de la phase (p, q).

Cela posé, les Ehrenfest déroulent les propositions suivantes :

1. La répartition de Maxwell est celle qui rend l'étoile [Z] maximum pour une valeur donnée de l'énergie totale $E_0 = E(Z) = \Sigma a_i \varepsilon_i$. L'étoile [Z] diminue très rapidement aussitôt qu'on s'écarte de la répartition de Maxwell.

2. Sur chaque hypersurface $E(p, q) = E_0$ la densité des domaines appartenant à la répartition de Maxwell est beaucoup plus grande que celle des autres domaines.

Moyennant l'hypothèse ergodique, cette proposition entraîne la suivante :

3. Au cours du mouvement indéfiniment poursuivi du modèle de gaz, la répartition de Maxwell domine *dans le temps* sur toutes les autres répartitions.

4. Si, avec Boltzmann, on mesure par la fonction $H(Z) = \Sigma a_i \log a_i$ l'écart entre une répartition Z et la répartition de Maxwell, la courbe en escalier *(Treppenkurve)* qui représente l'allure de H (Z) en fonction du temps demeure très longtemps au voisinage de son minimum H_0 et ne s'en écarte que pendant des durées très courtes.

Si $H_1 \gg H_0$, la durée pendant laquelle $H > H_0$ (à partir de H_1) diminue énormément quand la hauteur H_1 augmente.

5. La courbe H s'écarte presque immédiatement de ses points supérieurs, cela dans les deux sens du temps.

Les Ehrenfest font grief à Boltzmann d'avoir entendu par *courbe H* tantôt la courbe en escalier, tantôt la suite discrète de points extraite de cette courbe, tantôt une courbe continue interpolée entre les deux définitions précédentes. Ils reprochent encore à Boltzmann d'avoir parlé de « bosses » au lieu de « pointes ». Ils concluent que si, par courbe H, on entend exclusivement la suite discrète dont les points supérieurs correspondent presque tous à des pointes *(Spitzenmaxima)*, rien ne vient contredire la cohérence logique des énoncés précédents.

Si l'on réalise les propriétés en apparence contradictoires dont Boltzmann devait doter la courbe H en évitant d'autre part de donner prise aux objections Loschmidt et Zermelo, la critique organisatrice des Ehrenfest ne vient qu'accroître l'admiration due à l'intuition boltzmannienne.

TROISIÈME PARTIE

PROLONGEMENTS MODERNES

CHAPITRE PREMIER

La mécanique statistique au sens de Gibbs

A l'époque où Gibbs développe la mécanique statistique, il est au soir d'une carrière essentiellement consacrée à la thermodynamique. Dans ce domaine, sa pensée abstraite s'éclairait de nombreuses représentations géométriques, mais se refusait le plus souvent à sacrifier aux modèles mécaniques. Tout en raillant, nous dit son biographe [1], la plupart des *shibboleths* des mathématiciens, Gibbs n'en était pas moins sévère dans sa propre logique, et soucieux de ne livrer au public que des déductions achevées.

Dans ses *Elementary principles in statistical mechanics, developed with especial reference to the rational foundations of thermodynamics*, [1], Gibbs montre le plus grand souci de généralité. Ecartant toute hypothèse sur la constitution intime de la matière, et renonçant à suivre un système particulier dans la succession de ses configurations et de ses vitesses, il se propose de déterminer la manière dont un ensemble de systèmes de même nature se distribue entre les phases possibles à chaque instant, à partir d'une distribution à un instant donné.

Ainsi entendue, la mécanique statistique de Gibbs est une branche de la mécanique rationnelle, qu'il projette après coup sur la thermodynamique, par voie d'analogies formelles dont il discute ensuite la validité.

En passant, signalons que Gibbs, avant tout soucieux d'édifier la mécanique statistique sur les principes les plus généraux et de ce fait même peu prodigue de références, rend cependant hommage à Boltzmann d'avoir le premier, dès 1871, considéré explicitement la distribution en phases d'un grand nombre de systèmes, ainsi que les modifications de cette distribution au cours du temps, par application du principe du dernier multiplicateur de Jacobi — c'est-à-dire du théorème de Liouville.

[1] H. A. Bumstead, in *The scientific papers of J. Willard Gibbs*, vol. I, Longmans, Green and Co., Londres et New York, 1906, pp. XIII-XXVII. (Cf. Gibbs, [2].)

a) *Concepts généraux : densité en phase, indice de probabilité, distributions canonique et microcanonique.*

Gibbs définit la *densité en phase* D par le nombre dN de systèmes, identiques et indépendants, qui à un instant donné occupent un domaine infiniment petit $d\tau$ d'extension en phase :

$$dN = D d\tau.$$

Dans le cas de systèmes conservatifs, cette densité est constante avec le temps, en vertu des équations du mouvement. De cette conservation de la densité en phase, Gibbs déduit le théorème de Liouville, c'est-à-dire la conservation de l'extension en phase.

Avec Boltzmann, Gibbs considère comme très grand le nombre de systèmes présents dans le plus petit élément d'espace. La densité en phase peut donc devenir infinie, ainsi que le nombre des systèmes, dans un domaine fini d'extension en phase. Pour éviter d'avoir à considérer ces infinis, Gibbs introduit le *coefficient de probabilité*

$$P = \frac{D}{N}.$$

L'intégrale

$$\int P d\tau$$

prise entre des limites données d'extension en phase, exprime ainsi le rapport du nombre des systèmes tombant entre ces limites au nombre total des systèmes, c'est-à-dire traduit la *probabilité de présence*, entre ces limites, d'un système quelconque non spécifié de l'ensemble. Le coefficient de probabilité, de même que la densité en phase, est constant dans le temps, ce qui signifie que lorsque les équations différentielles du mouvement sont exactement connues, mais que les constantes des équations finies du mouvement sont incomplètement déterminées, le coefficient de probabilité d'une phase quelconque à un instant donné est le même que le coefficient de probabilité de cette même phase à tout autre instant.

De toute évidence on peut remplacer

$$\int_{\text{toutes phases}} P d\tau = 1 \qquad \text{par } N = \int_{\text{toutes phases}} D d\tau.$$

L'*indice de probabilité* η est le logarithme naturel de P :

$$\eta = \log P$$

et la conservation dans le temps s'étend évidemment à η.

Gibbs procède à l'étude détaillée de ce qu'il appelle une *distribution canonique*, définie par l'indice de probabilité :

$$\eta = \frac{\psi - E}{\Theta},$$

c'est-à-dire par un indice de probabilité linéaire par rapport à l'énergie E, ψ et Θ étant deux constantes. Θ, essentiellement positive, est dite le *module* de la distribution canonique considérée.

Soit $\tau(E) = V$ la valeur de l'extension en phase étendue à toutes les phases dont l'énergie est inférieure à la limite E. Cette valeur V est supposée finie avec E.

En posant

$$\frac{dV}{dE} = e^{\Phi},$$

l'extension en phase prise entre deux limites E′ et E″ pour l'énergie vaudra

$$\int_{E'}^{E''} e^{\Phi}\, dE.$$

On définit alors la *densité en énergie* par

$$N e^{\frac{\psi - E}{\Theta} + \Phi}$$

et la valeur la plus probable de cette énergie correspond à :

$$\frac{d\Phi}{dE} = \frac{1}{\Theta}.$$

Il est clair que l'introduction des fonctions V et Φ a pour objet de classer suivant leurs énergies les systèmes constituant un ensemble canonique. L'ensemble se trouve décomposé en parties dont chacune contient les systèmes pour lesquels cette énergie est comprise entre deux limites données. Si ces limites sont suffisamment rapprochées, on peut regarder l'énergie comme constante dans l'intervalle correspondant, et on obtient ainsi ce que Gibbs appelle une *distribution microcanonique*, sorte d'élément d'une distribution canonique.

La densité en phase d'une distribution microcanonique, que Gibbs exprime par la fonction :

$$D = e^{-\frac{(E - E')}{\omega^2}},$$

où E′ est l'énergie que possèdent les systèmes de l'ensemble et ω^2 une constante très petite, pourrait s'exprimer plus facilement en langage moderne par la fonction δ de Dirac, sous la forme :

$$D = \delta (E - E').$$

Au chapitre XI de son traité, Gibbs établit d'intéressantes propositions concernant des modes variés de distribution, dont nous ne retiendrons ici que les principales.

Tout d'abord, il montre que si un ensemble est distribué en phases de telle façon que l'indice de probabilité η soit une fonction arbitraire de l'énergie E, la valeur moyenne de cet indice est *moindre* dans cet ensemble que dans tout autre ensemble ayant la même distribution en énergie. De façon précise, l'hypothèse placée à la base de ce théorème se traduit par la relation :

$$\int_{E'}^{E'+dE'} e^{\eta + \Delta\eta}\, d\tau = \int_{E'}^{E'+dE'} e^{\eta}\, d\tau,$$

où η (E) est relatif au premier ensemble, $\eta + \Delta\eta$ au second, cette relation étant valable pour toute valeur E′ de l'énergie et, par suite pour toutes les phases [1].

D'une façon plus particulière, l'indice moyen de probabilité $\bar{\eta}$ de toute distribution canonique est *moindre* que l'indice moyen de toute distribution ayant la même énergie moyenne.

Gibbs établit encore que parmi toutes les distributions renfermées dans les mêmes limites de phase, et comprenant le même nombre de systèmes, la distribution uniforme (η constant) est celle qui possède le *moindre* indice moyen de probabilité.

b) *Tendance d'un ensemble de systèmes vers un état d'équilibre statistique.*

Gibbs recherche si un ensemble de systèmes isolés a quelque tendance au cours du temps vers un état d'équilibre statistique : « Il semble que nous pourrions trouver une sorte de mesure de la déviation d'un ensemble par rapport à l'équilibre statistique dans l'excès de l'indice moyen de probabilité sur le minimum compatible avec la condition d'invariabilité de la distribution par rapport à des fonctions de phases constantes dans le temps [l'énergie par exemple]. Mais nous avons vu que l'indice de probabilité est constant dans le temps pour chaque système de l'en-

[1] Un résultat analogue vaut encore si η est fonction de $F_1, F_2, \ldots$ (au lieu de E), $F_1, F_2, \ldots$ étant des fonctions déterminées de la phase.

semble. L'indice moyen est donc constant, et nous ne pouvons trouver par cette méthode aucune approche vers l'équilibre statistique au cours du temps [1]. »

Pour s'évader de cette impasse, Gibbs invoque l'exemple d'une masse cylindrique de liquide, dont un secteur de 90° est noir et le reste blanc, et à laquelle on imprime un mouvement de rotation autour de son axe, avec une vitesse angulaire fonction de la distance à l'axe. Dans le cours du temps, les parties noires et blanches se mettent à dessiner des rubans étroits, qui s'enroulent en spirale autour de l'axe. L'épaisseur de ces rubans diminue sans limite, et le liquide tend vers un état de mélange parfait des parties blanches et noires. C'est-à-dire que, dans tout élément de l'espace, la proportion de noir au blanc doit approcher de la limite $^1/_3$. Cependant, après toute durée finie, le volume total serait divisé en deux parties, l'une constituée exclusivement de noir, et l'autre de blanc. Si la matière colorante, au lieu d'être distribuée initialement avec une densité uniforme à travers une section du cylindre, était distribuée selon une densité représentée par une fonction arbitraire de r, θ, z (coordonnées semi-polaires), l'effet du même mouvement continué indéfiniment serait une approche vers un état où la densité ne dépendrait plus que de r et de z. Dans cet état limite, le carré moyen de la densité serait moindre que dans l'état initial, où la densité est supposée varier avec θ quoique, après toute durée finie, le carré moyen de la densité serait le même qu'au début.

Gibbs s'efforce encore de donner une explication plus précise de la tendance d'un ensemble vers un état d'équilibre statistique. Il suppose que l'extension en phase soit divisée en *éléments égaux* DV non infiniment petits, mais suffisamment petits pour que l'indice de probabilité η y soit, initialement, sensiblement constant.

A l'instant initial t', un certain système de l'ensemble est situé dans l'élément DV'. A l'instant ultérieur t'', ce système se trouve dans l'élément DV''. Les systèmes qui, initialement, occupaient DV' occupent, à l'instant t'' une extension en phase rigoureusement égale, mais celle-ci sera probablement répartie sur un très grand nombre d'éléments DV. Inversement, les systèmes trouvés en DV'' à l'instant t'' étaient initialement distribués dans un très grand nombre d'éléments DV.

Gibbs recherche la valeur de η au temps t'' dans DV''. Pour les systèmes qui proviennent de DV', cette valeur sera la même qu'en DV' au temps t', soit η'. Il en est de même pour les systèmes issus d'éléments très proches de DV'. Mais on ne peut en dire autant des systèmes en provenance d'éléments éloignés de DV'.

Il est donc nécessaire de se faire une idée de la nature de l'extension en phase occupée à t' par les systèmes qui, à t'', occupent DV''. Analytiquement, cela revient au même que de rechercher l'extension occupée à t'' par les systèmes qui, à t', occupaient DV'.

[1] [1], p. 144.

Les systèmes en DV″ qui se trouvent sur la *même trajectoire* que le système particulier considéré plus haut sont évidemment arrivés presque simultanément et doivent avoir quitté DV′ presque en même temps ; ils se trouvaient donc initialement en DV′ ou au voisinage immédiat de cet élément. L'indice moyen correspondant est donc sensiblement égal à η'. Il en est de même pour les systèmes en DV″ situés sur des trajectoires très voisines de la précédente.

Mais pour les trajectoires traversant DV′ et DV″ et qui ne sont pas aussi proches de la première trajectoire, on ne peut affirmer que le temps nécessaire pour passer de DV′ à DV″ soit sensiblement le même. La différence peut être faible devant $t''-t'$, mais comme cet intervalle lui-même peut être choisi aussi grand que l'on veut, cette différence n'a pas de limite en ses valeurs possibles.

Si maintenant nous faisons une *nouvelle évaluation* des indices de probabilité en phase au temps t'' *en utilisant pour cela les éléments* DV, nous obtiendrons en DV″ par exemple, *du fait de l'uniformité*, un indice *inférieur* (en vertu du théorème cité plus haut § *a*, *in fine*) à l'indice moyen correspondant à la distribution en phase au temps t' des systèmes qui sont venus occuper DV″. Ainsi la valeur moyenne de η pour tout l'ensemble, fondée sur la distribution à t'', sera *inférieure* à la valeur moyenne de cet indice fondée sur la distribution à t'.

Gibbs reconnaît que cette règle générale comporte des exceptions pour les systèmes dont les lois du mouvement sont telles qu'à de petites différences initiales de la phase correspondent à tout instant de petites différences de phase. Il remarque encore que le raisonnement précédent n'établit pas nécessairement la *priorité* de l'instant correspondant au plus grand indice ; au lieu de $t'<t''$, on pourrait aussi bien avoir $t''<t'$. Il observe enfin que prendre un système au hasard dans un ensemble à un instant lui-même choisi au hasard entre plusieurs instants t', t'', etc., revient pratiquement au même que de prendre un système au hasard dans l'ensemble constitué de tous les systèmes dans leurs phases à t', en même temps que dans l'ensemble de ces mêmes systèmes dans leurs phases à t'', etc. Cela donne un ensemble dans lequel l'indice moyen $\bar{\eta}$ sera *moindre* que dans l'ensemble donné, sauf dans le cas où la distribution en phases de l'ensemble donné est la même aux instants t', t'', etc.

c) *Analogies thermodynamiques.*

Pour trouver dans la mécanique rationnelle une base *a priori* des principes de la thermodynamique, Gibbs recherche, en mécanique statistique, les « analogues » de la température et de l'entropie. Il parvient ainsi, lorsque le nombre de degrés de liberté est très grand, à une coïncidence au moins approchée entre les équations régissant les ensembles

statistiques et les lois générales de la thermodynamique : « Si intéressante et significative que soit cette coïncidence, nous sommes encore loin, déclare Gibbs, d'avoir expliqué les phénomènes de la nature eu égard à ces lois. Car, comparés au cas de la nature, les systèmes que nous avons considérés sont d'une idéale simplicité. Quoique notre seule hypothèse soit que nous considérons des systèmes conservatifs d'un nombre fini de degrés de liberté, il semble que ce soit supposer beaucoup trop encore, dans la mesure où cela concerne la nature des corps. Les phénomènes de rayonnement, qui certainement ne sauraient être négligés dans tout système complet de thermodynamique, et les phénomènes électriques associés avec la combinaison des atomes, semblent montrer que l'hypothèse de systèmes à un nombre fini de degrés de liberté est inadéquate pour l'explication des propriétés des corps...

» Mais quoique ces difficultés, depuis longtemps reconnues par les physiciens (Boltzmann, *Wiener Berichte*, vol. 63, 1871, p. 418) semblent s'opposer, en l'état actuel de la science, à toute explication satisfaisante des phénomènes de thermodynamique tels qu'ils se présentent à nous dans la nature, le cas idéal des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté demeure un sujet qui n'est pas dénué d'intérêt théorique, et qui peut servir à jalonner la voie vers la solution des problèmes beaucoup plus difficiles que nous offre la nature. Et si l'étude des propriétés statistiques de tels systèmes nous donne une expression exacte de lois qui, dans le cas limite, prennent la forme des lois reçues en thermodynamique, l'intérêt de cette étude s'en trouve renforcé [1].

Il s'agit de retrouver, par la considération des ensembles statistiques, l'équation fondamentale de la thermodynamique :

$$dE = TdS - A_s da_s, \tag{1}$$

où E est l'énergie, T la température absolue, S l'entropie et où $A_s da_s$ (avec sommation sur l'indice muet s) représente, au sens étroit excluant toute action thermique, le travail mécanique exercé par le système sur les corps extérieurs [2].

L'étude détaillée des propriétés statistiques d'un *ensemble canonique* conduit Gibbs à la relation :

$$d\overline{E} = -\Theta d\overline{\eta} - \overline{A}_s da_s. \tag{2}$$

[1] [1], pp. 166-167.

[2] Je me borne ici à un résumé des résultats essentiels de Gibbs, sans pouvoir dans le cadre de cette étude en donner la justification détaillée. Notre objectif principal est de pouvoir, avec Planck, aboutir à une comparaison entre l'entropie au sens de Boltzmann et les différentes entropies au sens de Gibbs (voir plus loin, pp. 239-244).

où Θ est le module de la distribution canonique, η l'indice de probabilité et où les traits supérieurs désignent des signes de moyenne. Or le carré des anomalies de E est en général de l'ordre de $1/n$ où n est le nombre des degrés de liberté, en sorte que les valeurs individuelles sont indiscernables des valeurs moyennes si n est très grand. En ce cas, les anomalies de η sont négligeables. Il en est de même des anomalies des A_s, dans la mesure où ces forces sont déterminées par l'énergie et les coordonnées extérieures.

Si donc on fait abstraction des signes de moyenne, on parvient à l'analogie

$$\text{(I)} \qquad \boxed{T = \Theta \qquad \text{et} \qquad S = -\eta}$$

où la température absolue s'identifie au module (essentiellement positif) de la distribution canonique et l'entropie (au signe près) à l'indice de probabilité de cette distribution.

D'autre part, l'étude détaillée des propriétés statistiques d'un *ensemble microcanonique* conduit Gibbs à la relation :

$$\text{(3)} \qquad dE = e^{-\Phi} V d(\log V) - \overline{A_s}\Big]_E . da_s,$$

où les quantités Φ et V ont la signification précisée plus haut (§ a) et où le signe de moyenne $\overline{}\Big]_E$ qui s'entend à énergie donnée ne porte que sur les A_s.

Cette équation conduit à la seconde analogie :

$$\text{(II)} \qquad \boxed{T = e^{-\Phi} V \qquad \text{et} \qquad S = \log V}$$

On peut d'ailleurs éliminer Φ, ce qui donne :

$$T = \frac{\partial E}{\partial (\log V)}.$$

Enfin, partant de :

$$dE = \frac{\partial E}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial E}{\partial a_s} da_s,$$

Gibbs parvient, toujours pour un ensemble microcanonique, à la troisième analogie :

$$\text{(III)} \qquad \boxed{T = \frac{\partial E}{\partial \Phi} \qquad \text{et} \qquad S = \Phi}$$

Gibbs balance longuement entre ces trois analogies, sans parvenir à un véritable choix, car aucune de celles-ci ne lui semble parfaite. Bornons-nous à dire que, de l'aveu même de Gibbs, la notion même d'ensemble canonique « peut sembler artificielle et à peine pertinente pour une exposition naturelle du sujet [1] ». Toutefois, si l'on prend la température comme variable indépendante, ce sont les ensembles canoniques qui donnent la meilleure représentation mathématique d'un corps à température donnée.

Il est au contraire naturel de recourir aux ensembles microcanoniques lorsqu'on considère l'énergie (dont la mécanique fournit une conception parfaitement définie) comme variable indépendante au lieu de la température. Si, en outre, on attache plus d'importance aux valeurs moyennes qu'aux valeurs probables, on est conduit à donner la préférence à la seconde analogie, où $S = \log V$. Mais il peut arriver que l'intégrale qui définit V comme étant l'extension de toutes les phases dont l'énergie est inférieure à la valeur E devienne infinie, alors que Φ conserve un sens, ce qui ferait préférer la troisième analogie.

Observations d'Hadamard sur la thèse de Gibbs

Hadamard a donné de la thèse de Gibbs une intéressante analyse à laquelle nous nous arrêterons un instant [2]. Cette analyse discute essentiellement de la possibilité d'expliquer les processus irréversibles dans le cadre de la mécanique statistique.

Hadamard rappelle que les solutions des équations de la dynamique possèdent en général la stabilité à la Poisson, en vertu de laquelle le point représentatif d'un système repasse une infinité de fois dans le voisinage, aussi immédiat que l'on veut, de toute position déjà occupée, réserve faite de trajectoires exceptionnelles dont les points de départ ne peuvent former une extension en phase finie, si petite soit-elle. (C'est le théorème de Poincaré.)

A l'analyse de Boltzmann, qui repose sur l'intervention de chocs en grand nombre, lesquels peuvent se produire en un temps très court si le nombre de molécules est assez considérable pour cela, s'oppose celle de Gibbs qui considère des systèmes sans interaction mutuelle et ne s'applique qu'à un intervalle de temps $t'' - t'$ assez long pour qu'à deux systèmes très voisins au temps t' puissent correspondre au temps t'' des points représentatifs très différents (et inversement).

Pour Hadamard, il n'y a guère de doute que l'objection tirée de la réversibilité des équations du mouvement ne soit pas valable et ne puisse

[1] [1], p. 178.

[2] Cf. HADAMARD, [1], *Bulletin of the american math. Society*, vol. XII, janvier 1906, pp. 194-210.

prouver l'impossibilité de lois finales irréversibles. L'existence de telles lois est *plausible*, sans qu'on puisse aller jusqu'à l'affirmer.

A ce propos, Hadamard invoque l'analogie suivante : le battage d'un jeu de cartes est un procédé parfaitement réversible qui tend à une certaine régularisation du jeu. Si V est le nombre de cartes rouges suivies d'une noire, V_0 la moyenne de V pour tous les ordres possibles dans lesquels les cartes peuvent être rangées, soit V′ la valeur initiale de V. « La valeur probable de V après battage se rapproche de V_0. J'entends par là que si, au lieu d'un jeu, nous en considérons un grand nombre battus de toutes les façons possibles et au hasard, la moyenne de V pour ces différents jeux sera comprise entre V′ et V_0. »

Revenant aux ensembles de systèmes mécaniques, Hadamard observe que la position P″ du point représentatif d'un système au temps t'' est une fonction *pratiquement discontinue* de la position P′ du même point au temps t'. « Quand $t''-t'$ est très grand, c'est-à-dire qu'un changement très petit de P′ entraîne un changement très grand de P″, tout se passe comme si P′ étant donné, P″ était plus ou moins indéterminé, comme si la donnée de P′ correspondait au lancé d'une roulette dont l'arrêt marquerait la position de P″. Cette roulette fonctionnerait aussi parfaitement que possible si l'indétermination de P″ était absolue (sauf la condition de constance de l'énergie). Même si cette hypothèse est inexacte, il n'en est pas moins vrai que des points représentatifs primitivement rapprochés les uns des autres se dispersent avec le temps et que notre ensemble de systèmes est ainsi *battu*. »

De l'avis d'Hadamard, Gibbs n'apporte pas de démonstration rigoureuse de l'existence de processus irréversibles. On manque d'ailleurs d'une définition satisfaisante de l'*inorganisation* d'un ensemble. Avec Gibbs, on peut considérer comme type de distribution inorganisée l'ensemble des distributions possibles des systèmes en cause. Une distribution déterminée serait alors dite inorganisée si elle ne se distinguait en rien de la distribution totale. On pourrait aussi admettre que les distributions « organisées » sont des distributions *exceptionnelles* au sens de Poincaré à l'égard de la stabilité à la Poisson.

On peut montrer sur un exemple que, contrairement à l'objection de réversibilité, des mouvements inorganisés à t' peuvent être organisés à un instant ultérieur t''. « Considérons une série de projectiles tirés au hasard à une même hauteur h. Tous passeront à la hauteur h', très inférieure à h. Mais, dans cette nouvelle situation, les mouvements sont devenus exceptionnels : ils seront tous sensiblement verticaux et descendants.

» L'explication du paradoxe est immédiate : au premier instant, ces mobiles ne sont pas exceptionnels parmi ceux qui sont à la hauteur

$z = h$; au second instant, ils sont exceptionnels parmi ceux qui (avec la vitesse correspondant à la constante donnée des forces vives) sont à la hauteur h' : question toute différente de la première.

» Autrement dit, le fait pour un mouvement d'être organisé ou inorganisé dépend de ce qu'on suppose préalablement connu à son sujet. »

Et Hadamard conclut de la façon suivante :

« Si H est une certaine fonction de la distribution des systèmes S, la propriété suivante :

» *La quantité H est croissante si la distribution est inorganisée* est susceptible d'un énoncé du genre de celui-ci, où je ne vois plus de prise pour l'objection de réversibilité :

» Soient H_1 et $H_2 < H_1$ deux valeurs de H, T un intervalle de temps convenablement choisi. Désignons par M_1 les mouvements pour lesquels, pendant l'intervalle T, la quantité H prend au moins une fois la valeur H_1 ; par M_2 les mouvements pour lesquels (au cours du même intervalle de temps) H prend au moins une fois la valeur H_2 ; par M_3 ceux qui satisfont à la fois à l'une et à l'autre des conditions précédentes ; autrement dit qui sont à la fois des mouvements M_1 et des mouvements M_2.

» *Les M_3 sont exceptionnels parmi les M_1, mais non parmi les M_2.*

» Je ne doute guère, pour ma part, d'un pareil énoncé après les déductions de Gibbs et de Boltzmann ; et si leur conclusion était erronée, l'erreur ne pourrait porter que sur l'expression de la quantité H. »

CHAPITRE II

Poincaré devant l'interprétation mécanique de l'irréversibilité
Entropie grossière et entropie fine

A différentes reprises, Poincaré a exprimé un certain scepticisme devant la théorie cinétique des gaz [1] et en particulier devant les interprétations mécaniques données par Boltzmann et Gibbs des phénomènes irréversibles.

Citons par exemple l'hommage, à vrai dire cursif, que Poincaré rendit à Boltzmann devant l'Académie des sciences :

« Boltzmann, qui vient de mourir tragiquement, professait depuis longtemps à Vienne ; il s'était fait connaître surtout par ses recherches sur la théorie cinétique des gaz. Si le monde obéit aux lois de la Mécanique qui permettent de marcher simultanément en avant et en arrière, pourquoi tend-il constamment vers l'uniformité sans qu'on puisse le faire rétrograder ? Telle est la question qu'il avait entrepris de résoudre et non sans quelque succès [2]. »

A la même époque, Poincaré prélude à des *Réflexions sur la théorie*

[1] D'une façon générale, l'école française n'avait montré à l'origine que peu d'enthousiasme à l'égard de la théorie cinétique de Maxwell. C'est ainsi qu'en 1896 Joseph Bertrand en était toujours à critiquer la première démonstration donnée par Maxwell de sa loi de répartition des vitesses. Boltzmann lui réplique que dès 1868 Maxwell avait reconnu lui-même l'insuffisance de cette première démonstration. Il le fait en un français pittoresque qui vaut d'être cité :

« Je viens de lire votre Mémoire dans les Comptes rendus du 4 mai 1896. Vous y expliquez que la première démonstration que Maxwell a donnée de son théorème est fausse. Certainement vous y avez droit. Je m'étonne seulement que vous croyez dire quelque chose de nouveau. Maxwell même a déjà reconnu que sa première démonstration n'était pas exacte...

» Mais vous avouerez que, si une démonstration d'un théorème est fausse, il ne suit pas que le théorème même est faux. »

Et Boltzmann renvoie Joseph Bertrand à la seconde démonstration de Maxwell, ainsi qu'à celles de Lorentz, Kirchhoff et aux siennes propres :

« Vous n'avez pas examiné toutes ces autres démonstrations et vous n'avez pas donné une démonstration directe que le théorème de Maxwell soit faux. Si seulement une de toutes ces démonstrations est bien fondée, le théorème doit être exact. » ([38], pp. 566-567.)

[2] *Comptes rendus*, t. 143, 1906, p. 997, [11].

cinétique des gaz [1] par les remarques suivantes, qui visent aussi bien les thèses de Gibbs que celles de Boltzmann :

« La théorie cinétique des gaz laisse encore subsister bien des points embarrassants pour ceux qui sont accoutumés à la rigueur mathématique ; bien des résultats, insuffisamment précisés, se présentent sous une forme paradoxale et semblent engendrer des contradictions qui ne sont d'ailleurs qu'apparentes. Ainsi la notion d'un système de molécules *molar geordnet* ou *molekular geordnet* ne me paraît pas définie avec une précision suffisante.

» L'un des points qui m'embarrassaient le plus était le suivant : il s'agit de démontrer que l'entropie va en diminuant [2] ; mais le raisonnement de Gibbs semble supposer qu'après avoir fait varier les conditions extérieures on attend que le régime soit établi avant de les faire varier de nouveau. Cette supposition est-elle essentielle ou, en d'autres termes, pourrait-on arriver à des résultats contraires au principe de Carnot en faisant varier les conditions extérieures trop vite pour que le régime permanent soit établi. J'ai voulu éclaircir la question... »

Citons encore cette boutade de Poincaré dans sa *Thermodynamique* :

« Supposons que nous voulions placer un grain d'avoine au milieu d'un tas de blé ; cela sera facile ; supposons que nous voulions ensuite l'y retrouver et l'en retirer ; nous ne pourrons y parvenir. Tous les phénomènes irréversibles, d'après certains physiciens, seraient construits sur ce modèle. »

Revenons de façon plus précise aux *Réflexions sur la théorie cinétique* données par Poincaré en 1906 au *Journal de Physique*.

Appelant $P d\tau$ la probabilité de présence d'un système dans le domaine infiniment petit $d\tau$ d'extension en phase, Poincaré définit l'entropie par

$$\int P \log P d\tau \text{ [3]}$$

et la valeur probable d'une fonction quelconque φ de la phase par

$$\int_{\text{toutes phases}} \varphi \, P d\tau .$$

Il distingue alors deux cas :

1° Dans le premier, qu'il appelle l'*hypothèse discontinue*, les conditions initiales du mouvement sont supposées exactement connues pour

[1] [12], *Journal de Physique*, 4e série, t. 5, 1906, pp. 369-403, et *Œuvres complètes*, t. IX, 1954, pp. 587-619.

[2] Comme nous le verrons, Poincaré considère l'entropie comme donnée par la fonction H de Boltzmann : c'est dire qu'il change le signe traditionnel de l'entropie.

[3] C'est ici que, de toute évidence, Poincaré change le signe traditionnel de l'entropie.

chacun des systèmes semblables qui constituent l'ensemble. La probabilité de présence, à un instant donné, d'un système dans un domaine donné n'est alors autre chose que le rapport du nombre des systèmes qui se trouvent à cet instant dans ce domaine au nombre total des systèmes.

2° Dans le second, qu'il appelle l'*hypothèse continue*, les conditions initiales du mouvement sont supposées imparfaitement connues pour chaque système et on peut seulement évaluer la probabilité pour qu'à l'instant initial ce système se trouve dans un certain domaine. Soit, à un instant ultérieur quelconque, $p d\tau$ la probabilité de présence d'un système dans l'élément $d\tau$, p étant en général une fonction continue de la phase. Si on considère simultanément un grand nombre de systèmes, la probabilité de présence dans le domaine $d\tau$ sera définie par

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{P} d\tau = \frac{\Sigma p\, d\tau}{\mathrm{N}},$$

N étant le nombre total des systèmes. P sera en général une fonction continue de la phase, exprimant le rapport du *nombre probable* des systèmes qui se trouvent à cet instant dans le domaine $d\tau$ au nombre total des systèmes.

Soit un domaine *fini* d'extension en phase δ, $\Pi\delta$ la probabilité de présence dans ce domaine. Si δ devient de plus en plus petit, qu'arrivera-t-il de Π ?

Dans l'hypothèse discontinue, Π tend vers $+\infty$ ou zéro suivant qu'il y aura ou non un système au centre du domaine.

Dans l'hypothèse continue, Π tend vers la limite P définie par (1).

Les intégrales

$$\int \mathrm{P} \log \mathrm{P} d\tau, \qquad \int \mathrm{P} d\tau, \qquad \int \varphi \mathrm{P} d\tau$$

sont par définition les limites des sommes

$$\Sigma \Pi \log \Pi \cdot \delta, \qquad \Sigma \Pi \delta, \qquad \Sigma \varphi \Pi \delta,$$

étendues à un certain nombre de domaines qui, à eux tous, contiennent toutes les phases possibles.

« Dans l'*hypothèse discontinue*, cette limite est infinie en ce qui concerne l'entropie, tandis que les deux autres intégrales se comportent comme des intégrales ordinaires.

» Adoptons donc l'*hypothèse continue*. Il y aura néanmoins des cas où la somme $\Sigma \Pi \log \Pi\delta$ différera notablement de sa limite, tandis que les deux autres sommes différeront peu de la leur. Supposons en effet que les domaines δ soient très petits et que cependant la fonction P,

quoique continue, y prenne des valeurs très différentes. Par exemple, si a est très petit, $\sin\frac{x}{a}$, quoique continue, peut prendre des valeurs très différentes dans le domaine $x_0 < x < x_0 + b$ lorsque b, quoique très petit en valeur absolue, est grand par rapport à a. Dans ce cas $\Pi \log \Pi \cdot \delta$ relative à l'un de ces domaines pourra différer de $\int \mathrm{P} \log \mathrm{P} d\tau$ étendue à ce domaine. Au contraire, par définition,
$\Pi\delta = \int \mathrm{P} d\tau$ et, si le domaine est assez petit pour que φ ne varie pas sensiblement, $\varphi \Pi \delta \doteqdot \int \varphi \mathrm{P} d\tau$.

» Nous sommes ainsi conduits à distinguer l'*entropie grossière* de l'*entropie fine*. Faisons décroître les domaines δ ; si nous poussons jusqu'à la limite, la limite de $\Sigma \Pi \log \Pi \cdot \delta$ sera l'*entropie fine* ; elle sera finie dans l'hypothèse continue.

» Au contraire, si nous nous arrêtons quand les domaines δ sont devenus assez petits pour que nos moyens d'investigation habituels ne nous permettent pas de discerner deux phases intérieures à un même domaine, nous aurons l'*entropie grossière*. C'est l'entropie grossière que l'on envisage habituellement en physique.

» *L'entropie grossière est toujours plus petite que l'entropie fine.*

» En effet, divisons δ en deux domaines partiels et soient $\Pi\delta$, $\Pi_1\delta_1$, $\Pi_2\delta_2$ les probabilités correspondantes.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2, \quad \Pi\delta = \Pi_1\delta_1 + \Pi_2\delta_2,$$

donc

$$\Pi \log \Pi \cdot \delta < \Pi_1 \log \Pi_1 \cdot \delta_1 + \Pi_2 \log \Pi_2 \cdot \delta_2.$$

» $\Sigma \Pi \log \Pi \cdot \delta$ va donc toujours en augmentant quand on subdivise le domaine δ. »

Poincaré déclare alors : « On sait que l'*entropie grossière* des physiciens va toujours en diminuant [1], au moins quand on laisse au régime le temps de s'établir. » Au contraire, l'*entropie fine* est toujours constante, et ce résultat n'est soumis à *aucune restriction*.

Nous passons sur la démonstration que donne Poincaré de la constance dans le temps de l'*entropie fine*, car nous savons déjà que cette constance est une conséquence de la conservation de P en vertu des équations canoniques du mouvement (Gibbs).

Les Ehrenfest se sont sans aucun doute inspirés de cette analyse de Poincaré dans leur critique de la thèse de Gibbs, auquel ils reprochent d'avoir entendu l'indice de probabilité η tantôt au sens d'une *probabilité grossière* (dans des *cellules finies* de l'espace Γ à $2r$N dimensions où se

[1] Voir plus haut, p. 235, note 3.

situe le modèle de l'ensemble [1]), tantôt au sens d'une *probabilité fine* [2].

Si pertinentes que soient ces critiques, on ne saurait passer sous silence le fait que Gibbs avait aperçu lui-même la difficulté de semblables passages à la limite. C'est ainsi qu'à propos du déplacement d'un liquide contenant une matière colorante n'en affectant pas les propriétés hydrodynamiques, il écrivait :

L'état où la matière colorante a une densité uniforme, c'est-à-dire l'état de mélange parfait, qui est une sorte d'état d'équilibre en ce sens que la distribution de la matière colorante n'y est pas affectée par les mouvements internes du liquide, est caractérisé par le minimum du carré moyen de la densité de la matière colorante. Mais supposons que celle-ci soit distribuée avec une densité variable. Si nous donnons au liquide un mouvement quelconque, subordonné seulement à la loi d'incompressibilité, mouvement permanent ou non, la densité de la matière colorante en un point donné quelconque du liquide ne sera pas changée, ni par conséquent le carré moyen de cette densité. Cependant, c'est un fait très familier que le mouvement tend à amener le liquide à un état de mélange uniforme, ou d'uniformes densités des constituants, caractérisé par le minimum des carrés moyens de ces densités.

Point n'est besoin d'invoquer pour cela un processus de diffusion.

La contradiction est à chercher dans la manière d'évaluer la *densité* de la matière colorante. Cette quantité est la limite du rapport de la quantité de cette matière dans un élément d'espace au volume de cet élément. Si nous prenons comme éléments de volume, après un certain *amount of stirring*, les espaces occupés par les mêmes éléments de liquide qui, à l'origine, occupaient un certain ensemble d'éléments de volume, la densité de la matière colorante, estimée de cette manière, n'aurait pas changé. En outre, si au bout d'un déplacement fini, nous prenons des éléments de volume d'une forme quelconque mais suffisamment petits, le carré moyen de la densité de la matière colorante, déterminé par de tels éléments de volume, s'approcherait indéfiniment de sa valeur initiale. Mais si nous prenons un élément quelconque d'espace, de position et de dimensions fixes, nous pouvons continuer le mouvement assez longtemps pour que les densités du liquide coloré, rapportées à de tels éléments fixes, s'approchent d'une limite uniforme, c'est-à-dire d'un mélange parfait.

Le cas est évidemment un de ceux dans lesquels la limite d'une limite a des valeurs différentes suivant l'ordre dans lequel on applique le processus de passage à la limite [3].

Revenant à Poincaré, il est assez curieux de noter que c'est à propos de *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* (1913), [6], qu'il a donné un exposé systématique de la théorie cinétique de Maxwell.

Dans cet exposé, Poincaré se place dans le cas d'une hypothèse ergodique générale (où la trajectoire d'une molécule *remplit* la multiplicité à $2r-k$ dimensions définie par k intégrales premières simultanées des équations du mouvement) qu'il qualifie de « postulat de Maxwell ».

[1] r étant le nombre des degrés de liberté d'un système, et N le nombre total des systèmes.

[2] P. et T. Ehrenfest, [1], §§ 22c et 23. Cette critique à l'égard de Gibbs peut être considérée *a contrario* comme un hommage indirect au finitisme de Boltzmann.

[3] Cf. Gibbs, [1], pp. 144-146.

Jugement de Planck sur l'entropie au sens de Boltzmann et l'entropie au sens de Gibbs

Dans l'esprit d'une grande partie du public scientifique, le traité de mécanique statistique de Gibbs était appelé, du fait même de sa généralité, à éclipser la théorie cinétique au sens de Maxwell-Boltzmann. Et bien que Gibbs lui-même ait longuement appelé l'attention sur les aléas de ses propres analogies thermodynamiques, la tendance pouvait se faire jour de délaisser la leçon déjà ancienne de Boltzmann au sujet du second principe de la thermodynamique.

Le mémoire *Über die mechanische Bedeutung der Temperatur und der Entropie* où Planck crut devoir prendre position à cet égard est donc d'une importance toute particulière au regard de l'histoire de la science. Ce mémoire fait partie du *Boltzmann-Festschrift*, volume jubilaire dédié à Boltzmann à l'occasion de son soixantième anniversaire, auquel avaient participé de nombreux physiciens, [15].

Alors qu'autrefois, observe Planck, l'intérêt le plus direct se portait sur la température, grandeur directement mesurable, et que l'entropie apparaissait comme un concept compliqué, dérivé de la température, la chose s'est aujourd'hui inversée : *il faut avant tout expliquer mécaniquement l'entropie, et la définition de la température s'ensuit.* La raison de ce revirement est la suivante : au cours des tentatives d'explication mécanique de la thermodynamique, comme par exemple dans la théorie des systèmes monocycliques d'Helmholtz, on a constaté qu'on ne pouvait parvenir à une description mécanique précise de la température qu'en la subordonnant aux propriétés de l'équilibre thermique. Mais cet équilibre lui-même ne prend toute sa signification que du point de vue de l'irréversibilité, car il ne peut être défini que comme l'état final, vers lequel tendent tous les processus irréversibles. Ainsi la notion de température conduit nécessairement à l'étude de l'irréversibilité, et celle-ci repose exclusivement sur l'existence de la fonction entropie. *Cette dernière grandeur constitue donc le concept primaire, général, possédant un sens pour toutes les sortes d'états et pour toutes les modifications d'états,*

tandis que la température n'apparaît que sous la condition d'équilibre thermique, où l'entropie atteint son maximum. Un corps possède une entropie en chacun de ses états, mais ne possède de température définie que lorsque l'état est stationnaire dans un certain sens. Ainsi, par exemple, on peut définir l'entropie d'un gaz pour une répartition arbitraire des vitesses, mais la température seulement quand la répartition des vitesses est exactement, ou au moins de façon approchée, celle de Maxwell.

« Clausius et Maxwell ne semblent pas avoir essayé de donner une définition mécanique directe et générale de l'entropie. Il devait appartenir à Boltzmann de franchir ce pas, à partir de la théorie cinétique des gaz, en définissant l'entropie de façon générale et univoque par le logarithme de la probabilité de l'état mécanique.

» J. W. Gibbs propose, à côté de la définition de Boltzmann, trois nouvelles définitions fondées sur le calcul des probabilités dans ses travaux de mécanique statistique.

» Les définitions de Gibbs prétendent à une plus grande généralité, car elles ne comportent aucune hypothèse particulière sur la nature du système mécanique en cause. Elles se laissent étendre, en principe, avec succès à des systèmes comportant ou non un grand nombre de degrés de liberté et composés d'éléments de même nature ou non. A chacune de ces définitions de l'entropie correspond une définition de la température par $dQ = TdS$.

» Pour les systèmes d'un très grand nombre de degrés de liberté les trois définitions conduisent toujours, comme Gibbs l'a montré, au même résultat, en sorte que par exemple pour un complexe formé de très nombreuses molécules, il ne subsiste qu'une définition, laquelle s'accorde avec celle de la thermodynamique [1]. »

Planck se propose de rapprocher les trois définitions dont il s'agit, sur un exemple simple, dans le but d'examiner la question de principe, laissée ouverte par Gibbs, du choix à faire entre ces définitions. Il considère dans ce but un système composé d'un très grand nombre n de particules *libres* (Atomes) à l'intérieur d'un volume déterminé v. Il admet que l'énergie du système est purement cinétique :

$$E = \sum \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Aussi bien Boltzmann que Gibbs partent du concept d'une *Komplexion* (Phase), c'est-à-dire de l'ensemble des valeurs simultanées des $3n$ coordonnées $x_1, \ldots, z_n$ et des $3n$ moments conjugués $m_1 x'_1, \ldots, m_n z'_n$.

[1] [15], pp. 114-115.

En général, les particules sont de nature différente. Si certaines sont identiques, on admet, pour éviter toute ambiguïté, que ces particules sont numérotées ou identifiées par un procédé quelconque. Pour qu'une répartition d'états soit définie de façon univoque, on doit savoir à quelle particule s'applique chaque coordonnée et chaque moment.

Planck considère le cas de l'*état stationnaire*, toutes les particules étant de même nature (gaz monoatomique homogène). En ce cas, toutes les définitions de Boltzmann et de Gibbs sont en accord avec la thermodynamique. Pour celle de Boltzmann, Planck considère la chose comme établie et renvoie à la *Gastheorie*. Pour les définitions de Gibbs, Planck estime que le calcul direct n'est pas sans intérêt, du fait qu'elles s'écartent en la forme de la définition de Boltzmann :

« Alors que Boltzmann définit l'entropie par le logarithme de la probabilité, l'entropie selon la première définition de Gibbs (relative aux ensembles canoniques) est, avec le signe moins, la valeur moyenne du logarithme de la probabilité. Au cours des processus irréversibles, le logarithme moyen de la probabilité chez Gibbs *diminue*, tandis que chez Boltzmann le logarithme de la probabilité *augmente*. Mais cette contradiction n'est qu'apparente, et s'évanouit quand on tient compte du fait que les deux auteurs entendent sous le mot *probabilité* des concepts entièrement différents. Cela doit être regardé de plus près.

» Boltzmann obtient l'expression de la probabilité en distinguant entre un *état* du système donné et une « *complexion* » du système donné. Un état du système est donné par la loi de répartition des positions et des vitesses, c'est-à-dire par le nombre de particules qui sont situées dans chaque domaine élémentaire de l'extension en phase, en admettant que dans chacun des domaines élémentaires, considérés comme égaux, il y a toujours un grand nombre de particules. Ainsi un état déterminé renferme un grand nombre de complexions. Car lorsque deux particules quelconques, qui appartiennent à des domaines élémentaires différents, échangent leurs coordonnées et leurs quantités de mouvement, on obtient une nouvelle complexion, mais l'état reste le même. Si donc, avec Boltzmann, *on considère toutes les complexions comme également probables, le nombre des complexions que renferme un état déterminé donne la probabilité et par suite l'entropie du système dans l'état considéré* (à une constante additive près).

» Au contraire, avec Gibbs, la question de l'uniformité des particules ne joue pas davantage pour la détermination de l'entropie que pour la répartition des positions et des vitesses. Ce qui est pris ici en compte est bien plutôt le *nombre des complexions que l'on obtient quand on considère toutes les valeurs possibles des coordonnées et des vitesses dans le cadre des conditions imposées* : les valeurs des coordonnées doivent être comprises

dans le volume v considéré, tandis que les vitesses peuvent être soumises à des conditions particulières. Suivant le choix de ces conditions on obtient des définitions différentes de l'entropie [1]. »

Planck en vient alors au calcul des entropies au sens de Gibbs dans l'exemple particulier envisagé plus haut.

Dans la première définition de Gibbs, toutes les vitesses de $-\infty$ à $+\infty$ ainsi que toutes les valeurs de l'énergie E entre 0 et $+\infty$ sont possibles, et la probabilité d'une complexion (ou d'un état, ce qui est ici la même chose) est définie par

$$P = e^{\frac{\psi - E}{\Theta}}.$$

Les constantes Θ et ψ sont définies : par la valeur moyenne $\overline{E}$ de l'énergie pour toutes les complexions (chacune de celles-ci étant comptée pour un poids égal à la mesure de sa probabilité) et par la condition que l'intégrale de P, étendue au domaine total des complexions, ait pour valeur l'unité.

Le calcul concret, sur les détails duquel nous passons ici, donne pour l'entropie la valeur :

$$\text{(I)} \qquad -\overline{\log P} = \frac{\overline{E} - \psi}{\Theta} = \frac{3n}{2} \log \overline{E} + n \log v + \text{const}.$$

Dans la seconde définition de Gibbs, ce n'est pas la valeur moyenne $\overline{E}$ de l'énergie, mais sa valeur précise E.

Pour le calcul de l'entropie, les vitesses admissibles sont celles qui correspondent à une énergie du système *inférieure* à la valeur donnée E. L'entropie est alors log V, V étant le volume total de l'extension en phase correspondante, c'est-à-dire que

$$S = \log \int dx_1 \ldots dz_n \, m dx'_1 \ldots m dz'_n,$$

les limites étant fixées, pour les coordonnées par le volume v du système et pour les vitesses par la condition :

$$\frac{1}{2} m (x_1'^2 + \ldots + z_n'^2) \leq E.$$

Le calcul concret conduit à l'entropie :

$$\text{(II)} \qquad \log V = n \log v + \frac{3n}{2} \log E + \text{const}.$$

[1] [15], pp. 116-117.

La troisième définition de Gibbs consiste à poser l'entropie égale à $\log\left(\frac{dV}{dE}\right)$. Le calcul de cette quantité est facile à l'aide de l'équation qui précède et donne :

$$\text{(III)} \qquad \log\frac{dV}{dE} = n\log v + \left(\frac{3n}{2} - 1\right)\log E + \text{const.}$$

Les entropies (I) à (III) s'identifient si n est un très grand nombre. Les trois définitions de l'entropie sont donc équivalentes dans le cas de particules de même nature en état stationnaire.

Planck en vient alors au cas général, où les particules sont de nature différente.

« La définition de Boltzmann donne, eu égard au fait que le nombre des complexions correspondant à un état donné se trouve modifié, une valeur de l'entropie qui correspond à tout point de vue à celle de la thermodynamique, y compris les termes qui proviennent des concentrations des différentes sortes d'atomes. En revanche, les définitions de Gibbs, qui n'ont pas égard à la nature des particules, donnent à nouveau les mêmes expressions et ne fournissent par conséquent aucune indication sur la manière dont les différentes concentrations s'introduisent dans la constante additionnelle de l'entropie. Si l'on veut parvenir, par cette voie, à la forme thermodynamique de l'entropie, il est nécessaire d'en compléter la définition en introduisant, outre les complexions primitivement envisagées, de nouvelles complexions, en introduisant dans le calcul non seulement les coordonnées et les vitesses, mais aussi le nombre des particules différentes du système en le faisant varier dans des conditions données. Ce pas a été accompli par Gibbs dans le dernier chapitre de son livre en introduisant le *grand ensemble*, par opposition aux *petits ensembles*, où ces considérations étaient quelque peu embrouillées. Et on parvient ainsi enfin aux formules connues de la thermodynamique [1]. »

Et Planck conclut à une différence essentielle dans la mise en œuvre des définitions de Boltzmann et de Gibbs :

« Si, avec Gibbs, on veut définir l'entropie d'un système constitué d'un nombre déterminé de molécules, de volume donné et d'énergie donnée, et se trouvant en l'état stationnaire, il est nécessaire de connaître non seulement les valeurs données du nombre de molécules, du volume et de l'énergie, mais encore de considérer une infinité d'autres valeurs de ces grandeurs qui s'introduisent dans le calcul. Par exemple, bien que le volume soit donné, il faut considérer pour le calcul de l'entropie les

[1] [15], p. 120.

complexions pour lesquelles le système occupe un volume inférieur à celui qu'on considère. Il en va de même pour l'énergie : non seulement il faut considérer la valeur donnée de l'énergie, mais un nombre infini d'autres valeurs de l'énergie s'écartant peu ou beaucoup de cette valeur donnée. Au contraire, dans le calcul de l'entropie selon Boltzmann sont seules à considérer de prime abord et en principe les complexions qui sont compatibles en toute rigueur avec l'état donné. Le nombre des molécules, le volume et l'énergie du système ne sont plus, comme chez Gibbs, indéterminés et soumis au calcul des probabilités, mais plutôt la complexion particulière qui est compatible avec les valeurs données de ces grandeurs. A ce point de vue, la formulation de l'entropie selon Boltzmann apparaît beaucoup plus simple et plus adéquate [1]. »

Mais le défaut essentiel des définitions de Gibbs est leur manque de généralité au regard de la nature des états considérés :

« La question de la définition la plus générale et la plus rationnelle de l'entropie ne peut être tranchée que par la considération des états qui s'écartent sensiblement de l'état le plus probable. Pour ce cas, autant que je sache, Gibbs n'a somme toute fait connaître aucune méthode générale, dès l'instant où il n'a traité de semblables états que dans la mesure où ils se composent d'états stationnaires. Au contraire, la définition de Boltzmann s'étend, comme on le sait, directement à des états correspondant à des positions et à des vitesses entièrement arbitraires [2]. »

Et voici la conclusion, particulièrement nette, de Planck :

« Je crois pouvoir conclure de cette étude que la généralité apparente donnée par Gibbs à ses différentes définitions de l'entropie, en ce sens que rien n'y est spécifié de la nature du système considéré, s'achète au prix d'une limitation de la signification physique de ces définitions. Pour tous les processus réversibles, les définitions de Gibbs rendront de bons services, comme de nombreuses autres définitions possibles de nature plus formelle. Pour les processus irréversibles au contraire, qui donnent essentiellement à l'entropie sa signification propre et qui seuls fournissent la clef d'une entière compréhension de l'équilibre thermique, la définition de Boltzmann se révèle, parmi toutes celles qui ont été avancées jusqu'ici, comme la plus adéquate et la plus utile [3]. »

Le jugement qui précède est daté de Berlin, 24 juillet 1903. Planck pouvait parler savamment de l'utilité de la définition boltzmannienne de l'entropie en raison du rôle fondamental que celle-ci avait joué, quelques années auparavant, dans la genèse de la théorie des quanta.

CHAPITRE IV

Rôle de l'entropie au sens de Boltzmann dans la genèse de la théorie des quanta de Planck

Dans une série de mémoires parus de 1895 à 1897, Planck s'était attaqué aux processus irréversibles de rayonnement. Il s'attira de vives critiques de la part de Boltzmann, qui lui opposa l'objection de réversibilité. Cette objection, Boltzmann la connaissait d'autant mieux que, comme nous l'avons vu, il avait eu personnellement à s'en défendre à propos des modèles cinétiques du second principe de la thermodynamique.

D'une façon plus précise, dans une première critique [42], Boltzmann observe que les équations de Maxwell, ainsi que leurs conditions aux limites, demeurent valables (à la condition qu'il n'y ait pas de chaleur de Joule) même si des résonateurs électriques arbitraires sont présents dans le champ, lorsque laissant inchangées, aussi bien dans le champ que dans les résonateurs, les forces et polarisations électriques, on renverse simplement le sens du temps ainsi que les forces et polarisations magnétiques. Les corps infiniment conducteurs ne sont rien d'autre que des domaines de l'espace dans lesquels les oscillations électromagnétiques ne peuvent pénétrer et sur la frontière desquels elles se réfléchissent parfaitement. A cet égard, des résonateurs infiniment conducteurs se comportent simplement comme des éléments de la paroi supposée parfaitement réfléchissante. Il y a, dans ces conditions, exacte réversibilité de l'ensemble du processus de rayonnement.

Si une onde plane électromagnétique vient passer sur un résonateur, le faisant entrer en oscillation, cette onde modifiée reviendra sur le résonateur, aussi bien que les ondes radiales émises par le résonateur lui-même. Le résonateur enregistrera ainsi le même processus d'oscillation qu'auparavant, mais renversé. Cela suppose naturellement, non seulement l'absence de toute chaleur de Joule, mais aussi de tout hystérésis magnétique ou diélectrique dont les équations de Maxwell font exception. Le caractère unilatéralement orienté que Planck aperçoit dans l'action des résonateurs tient exclusivement au choix de conditions initiales particulières.

On aurait une analogie moléculaire d'une telle réversibilité si on considérait, au lieu du résonateur, une sphère fixe dans l'espace et, au lieu des ondes électriques, un ensemble de petites sphères se précipitant sur la sphère fixe selon des trajectoires parallèles. Par réflexion sur la sphère fixe, le mouvement des petites sphères serait aussitôt plus désorganisé. Mais si, à un instant quelconque, on renversait exactement le sens de leurs vitesses, le processus entier reprendrait en sens inverse. Il n'y a à cet égard aucune différence entre les processus purement mécaniques et les processus électriques, dès l'instant où on exclut tout dégagement de chaleur.

Il n'y a certes rien à objecter au point de vue qui consiste à admettre comme un fait d'expérience la dissipation de l'énergie et à se contenter, pour traduire les faits, des formules de la thermodynamique générale. Mais si l'on voulait, à l'aide d'ondes électromagnétiques, construire une image des phénomènes dissipatifs, cela ne serait possible que grâce à l'hypothèse, déjà très ancienne, selon laquelle les conditions initiales doivent être organisées d'une certaine manière.

Les modèles moléculaires des phénomènes dissipatifs dans lesquels le nombre des molécules est très grand mais fini, comme dans la théorie des gaz, ne sont pas en contradiction avec l'expérience. Cela, Boltzmann pense l'avoir établi dans ses répliques à Loschmidt, Culverwell, Poincaré, Zermelo.

Dans une seconde critique [43], Boltzmann, sans dissimuler d'ailleurs les difficultés du problème, fait à Planck une suggestion qui devait être entendue :

« Il est certainement possible, et il serait en tout cas méritoire de déduire des lois générales des phénomènes de rayonnement, un théorème analogue à celui de l'entropie, et cela selon les mêmes principes qu'en théorie des gaz [1]. »

Boltzmann s'élève encore contre l'affirmation de Planck qu'on ne connaît, dans toute la nature, aucun processus dont l'irréversibilité puisse provenir du jeu de forces purement conservatives. Il rappelle, ce qui est essentiel et devait appeler l'attention de Planck, que la démonstration selon laquelle, dans les processus moléculaires, le même état doit intervenir au bout d'un temps fini repose essentiellement sur l'hypothèse d'un *nombre fini* de molécules. Il serait absurde de s'attendre que la considération d'un nombre fini de molécules puisse offrir une analogie parfaite du second principe de la thermodynamique sous sa forme habituelle. Cela ne peut valoir que pour la limite dont s'approchent les phénomènes quand le nombre des molécules augmente. Si l'on substituait

[1] [43], p. 618.

aux équations différentielles de l'électromagnétisme des équations aux différences finies *entre un nombre fini d'éléments*, un théorème analogue devrait pouvoir être également valable dans ce domaine.

Certes, les modèles mécaniques traduisant les équations de l'électromagnétisme sont compliqués et l'hypothèse qu'ils puissent exister réellement dans l'éther est insoutenable. Ils n'en demeurent pas moins mathématiquement possibles. Et si des résonateurs électriques ou purement acoustiques peuvent donner lieu à des processus irréversibles, cela conduit à écarter le point de vue de Poincaré, selon lequel aucun processus irréversible ne peut être déduit en principe des équations différentielles de la mécanique rationnelle.

De même qu'en théorie cinétique, on devrait pouvoir définir dans le domaine du rayonnement un état qui soit le plus probable, ou plus exactement une formule générale qui renferme tous les états où les ondes ne sont pas organisées, mais se traversent de la façon la plus variée.

Le fait qu'un état inorganisé puisse se transformer en état organisé ne se produira que dans des cas exceptionnels, mais on ne saurait en démontrer l'impossibilité mathématique, aussi bien dans la théorie du rayonnement qu'en théorie des gaz. Planck a d'ailleurs tenu à reconnaître la justesse des critiques de Boltzmann :

« J'avais suggéré qu'un résonateur pourrait exercer une action unilatérale, donc irréversible, sur l'énergie du champ qui l'entoure, mais je m'attirai la contradiction énergique de L. Boltzmann. Avec l'expérience plus mûre qu'il possédait de ce genre de questions, il eut tôt fait de montrer que, d'après les lois de la mécanique classique, tous les phénomènes envisagés par moi pouvaient aussi bien avoir lieu dans un sens que dans l'autre, c'est-à-dire que l'onde sphérique émise par un résonateur pouvait inversement revenir à ce même résonateur, sous la forme de surfaces sphériques se rétrécissant de plus en plus jusqu'à s'y absorber complètement. Le résonateur pouvait donc renvoyer dans l'espace l'énergie reçue par lui auparavant, dans la direction même d'où cette énergie était venue. Si je pouvais, dans mon hypothèse du rayonnement, me passer de notions aussi singulières que celle d'ondes à sens unique, en introduisant une condition restrictive, il n'en restait pas moins que toutes ces analyses montraient avec évidence l'absence d'un chaînon essentiel pour arriver à la solution complète du problème.

» Il ne me restait donc plus, dans ces conditions, qu'à reprendre le problème en sens inverse, c'est-à-dire en me plaçant au point de vue de la thermodynamique, terrain où je me sentais plus à l'aise et comme chez moi.[1] »

[1] Cf. Planck, [19], pp. 70-71.

Ce retour à la thermodynamique devait conduire Planck à étudier par priorité, non pas la température, mais l'entropie d'un résonateur, ou de façon plus précise la dérivée seconde $\frac{d^2S}{dU^2}$ de l'entropie d'un résonateur par rapport à son énergie, laquelle offrait une mesure de l'irréversibilité du phénomène d'échange d'énergie entre un résonateur et le rayonnement ambiant :

« Comme ma tournure d'esprit était alors trop phénoméniste, je ne me posai pas la question du rapport entre l'énergie et la probabilité, et m'en tins à la seule considération des résultats expérimentaux [1]. »

Considérant d'abord, sur la foi des premières vérifications expérimentales, la loi de répartition de Wien comme ayant une portée générale, Planck traduit cette loi par la formule :

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\text{const}}{U}.$$

Les expériences de Lummer et Pringsheim, Rubens et Kurlbaum (1900) ayant révélé que la loi de répartition de Wien cessait d'être applicable pour les hautes températures et les grandes longueurs d'onde, où elle devait faire place à la loi de Rayleigh-Jeans, Planck est amené, pour englober tous les résultats d'expérience, à proposer la nouvelle formule :

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{a}{U(\beta + U)}.$$

Combinée avec la définition même de l'entropie $\left(\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}\right)$ et avec la *loi de déplacement* de Wien, dont l'expression la plus simple est $S = \text{fonct.}\ (U\lambda)$ où λ est la longueur d'onde, cette formule conduit pour la densité d'énergie E du rayonnement à la loi à deux constantes :

$$E = \frac{a\lambda^{-5}}{e^{b/\lambda T} - 1}\ ^{2}.$$

Aussitôt trouvée cette « heureuse formule d'interpolation », Planck se mit en devoir d'en chercher la véritable signification physique :

« La question considérée sous cet angle m'amena à considérer les rapports entre l'énergie et l'entropie en reprenant le point de vue de Boltzmann. Après quelques semaines qui furent certes remplies par le

[1] [19], p. 71.
[2] Cf. Planck, [10], p. 204.

travail le plus acharné de ma vie, un éclair se fit dans l'obscurité où je me débattais [1]. »

Suivons donc, pour ce qui concerne la mise en œuvre de l'entropie au sens de Boltzmann, le mémoire fondamental de Planck *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*, [12] :

« L'entropie stipule l'inorganisation *(Entropie bedingt Unordnung)* et d'après la théorie électromagnétique du rayonnement cette inorganisation réside, pour les oscillations monochromatiques d'un résonateur, même lorsque celui-ci se trouve dans un champ de rayonnement stationnaire, dans l'irrégularité de ses changements continuels d'amplitude et de phase lorsqu'on considère une durée très grande devant celle d'une oscillation, mais très courte devant celle d'une mesure. Si l'amplitude et la phase étaient absolument constantes, c'est-à-dire si les oscillations étaient absolument homogènes, aucune entropie ne pourrait exister et l'énergie d'oscillation serait intégralement convertible en travail. L'énergie U d'un seul résonateur oscillant de façon stationnaire ne doit donc être considérée que comme une moyenne temporelle ou, ce qui revient au même, comme la moyenne simultanée des énergies d'un grand nombre N de résonateurs identiques qui se trouvent suffisamment éloignés les uns des autres dans le champ de rayonnement stationnaire pour ne pas s'influencer mutuellement. C'est dans ce sens que nous parlerons de l'énergie moyenne U d'un résonateur [2]. »

Un système de N résonateurs possède alors une énergie totale

$$U_N = NU$$

et une entropie totale

$$S_N = NS,$$

S étant l'entropie moyenne d'un résonateur ; et l'entropie totale S_N repose sur l'inorganisation avec laquelle l'énergie totale U_N se répartit entre les N résonateurs.

Nous posons alors :

$$S_N = k \log W + \text{const},$$

W étant la probabilité pour que les N résonateurs possèdent dans l'ensemble l'énergie U_N. Cette relation constitue en fait la définition de W :

« Car nous ne possédons dans les hypothèses qui servent de base à la théorie électromagnétique du rayonnement aucun point de départ qui nous permette de parler d'une telle probabilité dans un sens précis. La simplicité de la relation précédente et son étroite parenté avec une

[1] [19], p. 73.
[2] [12], pp. 555-556.

proposition de la théorie cinétique des gaz plaident *a priori* en sa faveur [1]. »

Et ici Planck se réfère explicitement, non pas à la *Gastheorie*, mais à la source même, c'est-à-dire au grand mémoire de 1877 où Boltzmann avait formulé l'interprétation probabiliste du second principe de la thermodynamique.

Pour trouver l'expression de W, « il est nécessaire de considérer U_N non pas comme une quantité continue, infiniment divisible, mais comme une quantité composée de parties égales, discrètes et finies. Nous appelons *élément d'énergie* une telle partie, en sorte que :

$$U_N = P\varepsilon,$$

P étant un grand nombre entier [2]. »

Cette hypothèse, dont le lien étroit avec les considérations finitistes développées par Boltzmann est évident, entraîne la conséquence que la répartition des P éléments d'énergie entre les N résonateurs ne peut avoir lieu que selon un nombre fini et déterminé de combinaisons. Avec Boltzmann, Planck qualifie de « *complexion* » une semblable combinaison. Les résonateurs sont supposés numérotés dans l'ordre 1, 2, ..., N. Le nombre des complexions possibles est alors, d'après l'analyse combinatoire :

$$R = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!},$$

soit sensiblement, puisque N et P sont de très grands nombres :

$$R = \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N \cdot P^P}.$$

Planck fait alors l'hypothèse que la probabilité W pour que les N résonateurs possèdent au total l'énergie $U_N = P\varepsilon$ est proportionnelle au nombre R de toutes les complexions possibles, ce qui revient à admettre que *toutes les complexions sont également probables*, hypothèse entièrement parallèle à celle de Boltzmann à l'égard de la répartition d'énergie cinétique entre des molécules [3]. La validité d'une telle hypothèse est, de l'avis de Planck, affaire d'expérience, ou plus exactement d'accord entre théorie et expérience.

Planck parvient ainsi, pour l'entropie d'un résonateur en fonction de son énergie à la formule :

[1] [12], p. 556.
[2] *Ibid.*, pp. 556-557.
[3] Voir plus haut, p. 193.

$$S = \frac{S_N}{N} = \frac{k \log R}{N} = k\left\{\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)\log\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon}\log\frac{U}{\varepsilon}\right\}.$$

En conjuguant cette expression avec la *loi de déplacement* de Wien, laquelle sous sa forme la plus générale impose la condition :

$$S = \text{fonct.}\left(\frac{U}{\nu}\right),$$

où ν est la fréquence, Planck parvient à la conclusion que l'élément d'énergie ε doit être proportionnel à la fréquence :

$$\boxed{\varepsilon = h\nu}$$

et obtient enfin, compte tenu de $\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$, la relation :

$$U = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Pour parvenir à la loi de répartition de l'énergie, Planck invoque la relation suivante, conséquence de la théorie électromagnétique du rayonnement, entre la densité spatiale d'énergie $\varrho_\nu d\nu$ du rayonnement de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$ et l'énergie moyenne U d'un résonateur de fréquence ν :

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U,$$

où c est la vitesse de la lumière. D'où

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Ou encore, en désignant par $E_\lambda d\lambda$ la densité d'énergie du rayonnement de longueur d'onde comprise entre λ et $d\lambda$:

$$E_\lambda = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{ch/k\lambda T} - 1},$$

ce qui ramène à la loi empirique primitivement énoncée.

Cette théorie de Planck devait recevoir l'accord explicite de Boltzmann :

« Après tant de désillusions, déclare Planck, j'eus la satisfaction particulièrement précieuse de voir Ludwig Boltzmann, dans la lettre qu'il m'écrivit quand je lui eus envoyé mon mémoire, se déclarer pleinement d'accord avec moi, tant sur les principes que sur toute la suite de mes déductions [1]. »

Ajoutons encore que Planck devait combiner l'entropie boltzmannienne $k \log P$ d'un gaz monoatomique en équilibre thermodynamique et l'entropie $k \log R$ d'un grand nombre de résonateurs se trouvant dans un champ de rayonnement stationnaire. En admettant, conformément à la théorie électromagnétique du rayonnement, l'indépendance entre la vitesse des atomes et la répartition de l'énergie du rayonnement, le nombre de complexions du système total est PR et son entropie $k \log (PR)$. [13.]

[1] [19], p. 74.

Planck et l'énergétique

Dans sa défense de l'atomistique, nous avons vu Boltzmann s'attaquer à la phénoménologie, plus vigoureusement encore qu'à l'énergétique. A l'époque des entretiens de Lübeck [1], Planck, qui s'était jusque-là essentiellement consacré à l'étude de la thermodynamique, était encore profondément pénétré des thèses de la phénoménologie. Et s'il fait de l'énergétique une critique sévère, ce n'est pas au profit des idées de Boltzmann, auxquelles il est encore loin d'être rallié, mais simplement sur l'autel de la rigueur mathématique que devrait offrir toute théorie physique.

Planck observe que l'on a récemment assisté à l'entrée en scène d'une nouvelle énergétique, distincte de celle que Rankine avait proposée dès 1853, mais partant d'idées analogues. Cette nouvelle doctrine considère les résultats acquis en thermodynamique d'un point de vue différent, en apparence d'une plus grande universalité, et retrouve ces résultats par des moyens si simples qu'il semble possible de les formuler directement et sans effort. Elle vise à étendre la même méthode systématique à d'autres branches de la physique, jusque-là séparées ; elle se propose de résoudre encore d'autres problèmes, et enfin elle mène la lutte contre le mécanisme *(mechanische Naturanschauung)*, auquel la science doit encore tant de résultats.

« Je n'entreprendrai pas ici, déclare Planck, d'entrer en lice en faveur du mécanisme ; car cela supposerait une étude approfondie et à certains égards fort difficile. Il ne s'agit ici que de choses beaucoup plus élémentaires, notamment de discuter, de façon générale, la valeur mathématique de la nouvelle énergétique. L'étude de cette question préalable conduit déjà tout homme compétent à la conclusion irréfutable que la nouvelle énergétique manque de toute base sérieuse, que ses simples démonstrations, là même où elles auraient la plus grande importance,

[1] Voir plus haut, p. 137.

ne sont que des apparences de démonstrations, qu'elle n'atteint pas les véritables problèmes et *a fortiori* ne saurait contribuer à les résoudre[1]. »

Et Planck invoque l'exemple de l'un des concepts caractéristiques de l'énergétique : *l'énergie de volume*. Il en est si souvent question dans les écrits des énergétistes que la plupart des physiciens et chimistes, si éloignés qu'ils soient de l'énergétique, ont fini par s'habituer à ce terme, sans en chercher la véritable origine. Cependant l'examen de ce concept révèle rapidement qu'il constitue « un véritable non-sens mathématique » et qu'il est dépourvu de toute réalité. Une grandeur physique, et surtout une quantité d'énergie qui, au sens de l'énergétique, représente une véritable substance, devrait être entièrement spécifiée par l'état physico-chimique du système correspondant, en sorte que lorsque le système repasse à nouveau par le même état, cette quantité d'énergie reprenne sa valeur. Sans quoi le principe de conservation de l'énergie perdrait toute signification.

Pour un gaz de masse, de densité et de température données, l'énergie de volume serait, suivant l'énergétique, égale à $\int p dv$ où p est la pression et v le volume. Mais si le gaz subit une suite de transformations, comme par exemple dans un cycle de Carnot, et revient à son état primitif, son énergie de volume devrait reprendre la même valeur. Or il est bien connu que cela ne se vérifie pas en général, le gaz ayant produit au cours d'un tel cycle un travail positif ou négatif.

On pourrait objecter qu'il ne s'agit pas de la valeur absolue de l'énergie de volume, mais d'une simple différence. Toutefois cette différence elle-même ne devrait pas dépendre de la voie suivie par le gaz. L'énergétique méconnaît ainsi les mises en garde de Clausius à l'égard des différentielles non intégrables.

Le champ d'application véritable de l'énergétique est beaucoup plus restreint que ses ambitions voudraient le faire croire. C'est ainsi qu'en mécanique, elle fait abstraction du frottement, de la diffusion, de l'élasticité imparfaite ; en électromagnétisme, de la chaleur de Joule, de l'hystérésis magnétique, etc. ; en optique, de l'absorption et de la dispersion, pour ne retenir d'une manière générale que les processus réversibles. Elle contribue certes, dans ce domaine restreint, à illustrer les processus naturels ; mais elle ne peut rien nous offrir de véritablement nouveau, car la science possède depuis longtemps à cet égard un outil permettant d'étudier de tels processus, savoir le principe de la moindre action au sens d'Hamilton.

Pour ce qui concerne la thermodynamique, les affinités chimiques, l'électrochimie, aussi bien que pour les phénomènes irréversibles de la

[1] [7], p. 73.

mécanique, de l'électromagnétisme et de l'optique que nous avons mentionnés, les concepts et théorèmes de l'énergétique perdent leur signification. La surprenante facilité de ses démonstrations provient du simple fait qu'elle reporte dans ses définitions le contenu des propositions à démontrer ; mais on a vu, par l'exemple de l'énergie de volume combien ces définitions peuvent être illusoires. Avant tout, l'énergétique est coupable d'avoir dissimulé l'opposition de principe entre processus réversibles et irréversibles, dont la mise en évidence et l'étude approfondie commandent tous les progrès de la thermodynamique et des disciplines connexes.

Planck affirme que l'énergétique n'a absolument rien apporté de neuf, en dépit du temps et des occasions qui lui ont été laissés depuis Rankine. Certes, elle n'a jamais été mise en contradiction avec l'expérience ; mais cela pour la simple raison que l'imprécision de ses concepts l'a empêché d'avancer quelque résultat nouveau qui ait pu être soumis au contrôle de l'expérience.

« Une théorie qui, pour garantir son existence, est obligée d'écarter les problèmes réels n'est plus enracinée dans le domaine de la science, mais dans le sol de la métaphysique, hors d'atteinte des armes de l'empirisme. Je crois donc, conclut Planck, qu'il est de mon devoir de mettre en garde, de toutes mes forces, contre un nouveau développement de l'énergétique dans la direction où elle s'est récemment engagée, lequel se traduit par une sensible régression sur les résultats antérieurs de la recherche théorique et ne peut avoir comme conséquence que d'inciter les jeunes esprits qui abordent la science à s'abandonner à des spéculations de dilettante, au lieu de se plonger dans l'étude même des grandes œuvres — et de remettre en friche, pendant des années, un important domaine de la physique théorique [1]. »

[1] [7], pp. 77-78.
Ce souci pédagogique rejoignait exactement celui de Boltzmann (voir plus haut, p. 95).

CHAPITRE VI

Planck et Mach
Quelques mots sur la théorie physique au sens de Planck

Dans une conférence faite à Leyde en 1908 sur le thème de l'unité de la conception de l'Univers en physique, Planck avait été conduit à critiquer la doctrine d'Ernst Mach « selon laquelle il n'existerait pas d'autre réalité que nos propres sensations, et où toutes les sciences positives ne seraient, en dernière analyse, qu'un essai d'adaptation de nos pensées à nos sensations : adaptation fait d'un point de vue purement économique sous la pression de la lutte pour la vie [1] ».

Mach entendait ainsi lutter contre les prétentions du mécanisme, qu'il jugeait excessives ; mais Planck lui reproche d'avoir dépassé la mesure, en dégradant l'idée que le physicien doit avoir de l'univers :

« Si persuadé que je sois de ce que le système de Mach, poussé dans toutes ses conséquences logiques, ne renferme aucune contradiction interne, je n'en suis pas moins convaincu que ce système n'a au fond qu'une signification purement formelle : il est incapable de pénétrer l'essence même de la science, et cela parce qu'il est étranger au caractère essentiel de toute recherche scientifique, savoir la construction d'un *Weltbild* qui soit rigoureusement stable, indépendant des mutations affectant les générations et les peuples [2]. »

Peut-être jugera-t-on que Planck se fait ainsi du *monde extérieur* une image trop rigide et trop délibérément cristallisée. Il est plus heureux, semble-t-il, lorsqu'il montre que les grands novateurs de la science, tels Copernic, Képler, Huygens, Newton, Faraday, ont été guidés par la foi de leurs convictions scientifiques et non par un souci économique quelconque :

« Si le principe d'économie de Mach devait être réellement placé au centre de toute théorie de la connaissance, les génies qui sont encore à naître n'y trouveraient qu'une entrave à leur pensée. Les ailes de leur

[1] [15], p. 73.
[2] *Ibid.*, p. 74.

imagination en seraient paralysées et le progrès de la science serait sans doute compromis de façon désastreuse. Dans ces conditions, ne serait-il pas plus « économique » de ne faire au principe d'économie qu'une place un peu plus modeste [1] ? »

Mach reçut assez mal la chose, se refusant à prendre au sérieux les critiques de Planck [2].

Revenant sur le même sujet, Planck commence par reconnaître avoir été lui-même, durant son *Kieler Zeit* (1885-1889), un adepte convaincu de la philosophie de Mach, laquelle devait exercer une action profonde sur sa pensée physique [18]. Et s'il devait s'en détacher plus tard, c'était pour s'être persuadé de l'impossibilité, en suivant la voie tracée par Mach, de dépouiller la théorie physique de toute métaphysique.

Sur le terrain technique, Planck reproche, entre autres choses, à la thermodynamique de Mach [3] de confondre le *perpetuum mobile* du premier genre (production de travail à partir de rien) et le *perpetuum mobile* du second genre, qui contredirait au second principe de la thermodynamique. Il est moins bien inspiré lorsqu'il fait grief à Mach de concevoir la possibilité d'une relativité plus générale que celle de la mécanique, dans une voie qui devait guider plus tard Einstein. Planck rappelle encore, et cela nous ramène à Boltzmann, que Mach doute de la possibilité de ramener le second principe à une proposition probabiliste, et nie la réalité des atomes. Et, avec une ironie cruelle, il ajoute :

« Je ne serais guère étonné de voir un jour quelque membre de l'école de Mach venir avec la grande découverte que l'hypothèse probabiliste (relative au second principe), ou la réalité des atomes ne fait que traduire une exigence de l'économie scientifique. Alors tout reviendrait dans le plus bel ordre, l'atomistique serait heureusement sauvée, et il serait avec cela particulièrement avantageux que chacun puisse toujours entendre, par le mot d'économie, ce qui lui convient [4]. »

En dépit de ces séduisantes perspectives, Planck propose de donner au concept d'économie un sens réel, en lui laissant sa signification humainement utilitaire. Celle-ci est d'un poids suffisant, même en science pure :

« Mais pour montrer la voie à la recherche physique, le principe d'économie, entendu au sens le plus large, n'est d'aucune utilité pour la simple raison qu'*a priori* on ignore de quel point de vue l'économie sera garantie de la façon la plus efficace et la plus durable. C'est pourquoi lorsque le physicien veut faire avancer sa science, il lui faut être réaliste,

[1] [16], p. 74.
[2] E. Mach, *Scientia*, VII, 14, 1910, p. 225, [3].
[3] E. Mach, *Die Prinzipien der Wärmelehre, historisch-kritisch entwickelt*, J. A. Barth, éd., Leipzig, 1896, [1].
[4] [18], p. 1190.

et non économe, c'est-à-dire qu'il doit avant tout chercher, dans le cours des phénomènes, ce qui est permanent et indépendant des sensations humaines, pour l'en extraire. L'économie de pensée est pour lui un moyen, et non une fin. Il en a toujours été ainsi et il en sera toujours ainsi, en dépit d'E. Mach et de sa prétendue antimétaphysique [1]. »

Nous ne pouvons, par le biais de cette étude sur l'influence de Boltzmann, nous étendre trop longuement sur la théorie physique au sens de Planck. Signalons cependant qu'à un degré moindre que Boltzmann, Planck avait eu également à souffrir, au début de sa carrière, de l'intransigeance de l'école dirigeante de l'époque ; et cela explique, dans une certaine mesure, la vivacité des critiques que nous venons d'analyser :

« Dans les années 89 et 90 du siècle dernier, une expérience personnelle m'a appris ce qu'il en coûte à un chercheur, en possession d'une idée à laquelle il a mûrement réfléchi, de vouloir la propager. Il a constaté combien les meilleurs arguments qu'il produisait dans ce but pesaient peu, parce que sa voix n'avait pas l'autorité suffisante pour s'imposer au monde savant. A cette époque, il était vain d'essayer de contrecarrer les Wilhelm Ostwald, les Georg Helm, les Ernst Mach [2]. »

Soulignons encore que, par principe, Planck était résolument déterministe [3] :

« Il est à mon avis essentiel, dans l'intérêt du progrès, d'admettre parmi les postulats de la physique, comme on l'a toujours fait jusqu'ici, non seulement l'existence de lois, mais aussi le caractère strictement causal de ces lois. Le terme de la recherche scientifique ne pourra donc pas être considéré comme atteint tant qu'une loi de caractère statistique n'aura pas été ramenée à une ou plusieurs lois de caractère dynamique ; cela sans vouloir frustrer les lois statistiques de leur grande importance pratique [4]. »

Planck voyait essentiellement dans le déterminisme un principe heuristique, un guide, et une incitation à la recherche. Cependant le développement de la mécanique quantique devait le conduire à penser qu'il pouvait y avoir une limitation aux possibilités d'explication causale :

« L'indéterministe est pleinement satisfait et juge qu'il n'a plus rien

[1] [18], p. 1190.
[2] [22], p. 259.
[3] Plus déterministe sans doute que Boltzmann, lequel déclarait : « L'habitude de chercher partout des liaisons causales nous incite à relier de cette manière des événements qui semblent dus purement au hasard à d'autres événements qui leur sont souvent tout à fait hétérogènes ; et la loi de cause à effet qui, bien appliquée, est le fondement de toute connaissance, peut être un feu follet qui nous égare sur une fausse piste. » ([17], p. 321.)
[4] [20], p. 159.

à se demander quand il sait que la fonction d'onde de la physique quantique est une fonction de probabilité. [Le déterministe ne s'y résignera pas et cherchera à découvrir] des relations à forme de lois strictes entre la fonction d'onde et les phénomènes ayant lieu dans les corps auxquels cette fonction se rapporte ou qui réagissent sur elle... Mais une chose est certaine, c'est que le quantum d'action est un terme mis par la nature des choses à l'efficacité des instruments de mesure physique dont nous disposons actuellement, une barrière infranchissable qui nous empêche et nous empêchera toujours de donner une explication causale complète de la nature intime des phénomènes les plus délicats [1]. »

[1] [21], pp. 244, 245, 246.

Einstein et la mécanique statistique

Dès 1902, Einstein, qui avait alors 23 ans et dont le nom n'était encore apparu qu'une fois dans la littérature, à propos de réflexions sur les phénomènes de capillarité, avait pris connaissance de la *Gastheorie* de Boltzmann.

De cette lecture, le jeune savant tire l'impression que la thermodynamique statistique au sens de Maxwell et Boltzmann demeurait inachevée, la liaison instaurée par la théorie cinétique entre dynamique et calcul des probabilités ne permettant pas d'aboutir, en toute généralité, au second principe, ni même aux lois de l'équilibre thermique.

Nous savons cependant que Boltzmann avait eu parfaitement conscience d'avoir découvert, dans l'interprétation probabiliste de l'entropie, un principe très général qui ne devait pas être limité au cas des gaz. Cette conviction, Boltzmann l'avait exprimée dans son grand mémoire de 1877 [1]. Mais, dans la *Gastheorie*, il distinguait entre la *signification mathématique* de la grandeur H, mesure de la probabilité des états, dont les variations étaient obtenues par l'analyse détaillée des collisions entre les molécules du modèle mécanique, et la *signification physique* de cette même grandeur, rattachée à l'entropie. Et cette signification physique, Boltzmann ne l'avait, dans son traité, explicitée que dans des cas particuliers ; cela, de son propre aveu, « pour ne pas devenir difficilement compréhensible par suite d'une trop grande généralité [2] ».

Si donc, comme il est vraisemblable, la lecture du jeune Einstein s'était limitée à la *Gastheorie*, seul ouvrage qu'il cite explicitement dans les mémoires que nous allons analyser, son sentiment d'inachèvement était parfaitement fondé.

Einstein va donc s'efforcer d'obtenir l'expression de l'entropie correspondant au modèle mécanique le plus général. Dans un premier

[1] Voir plus haut, p. 199.
[2] [2], vol. I, § 8, p. 58.

mémoire, [1], achevé à Berne en juin 1902, il s'en tient au modèle déjà considéré par Boltzmann et composé de systèmes satisfaisant aux équations canoniques de la dynamique. Dans un second mémoire, [2], annoncé dès le premier et daté de janvier 1903, Einstein considère, plus généralement, comme éléments de la théorie cinétique, des « *systèmes physiques* » satisfaisant individuellement à des équations linéaires quelconques. Ce faisant, Einstein s'inspire, semble-t-il, d'une extension du théorème de Liouville que Boltzmann avait établie, sans toutefois en déduire d'applications explicites [1].

Les deux mémoires d'Einstein sont tout à fait parallèles. On peut, pour éviter toute redite, se borner à l'analyse de ce second mémoire, où Einstein révèle la tendance, qui devait inspirer toute son œuvre, de parvenir à la plus grande généralité.

Soit donc, avec Einstein, un système physique dépendant de n grandeurs $p_1, p_2, \ldots p_n$ dites *variables d'état*. A tout instant, ce système est régi par les n équations différentielles linéaires :

$$\frac{dp_i}{dt} = \varphi_i(p_1, p_2, \ldots p_n), \tag{1}$$

où les φ_1 sont supposées uniformes. On admet l'existence *d'une et une seule* intégrale première, qui est celle de l'énergie :

$$E(p_1, p_2, \ldots p_n) = \text{const.}$$

L'expérience montre qu'au bout d'un temps suffisamment long, un système *isolé* prend un état dit *stationnaire* où tous les paramètres demeurent constants.

Considérons alors à partir d'un instant arbitraire et pendant une durée T l'évolution d'un système physique régi par l'équation (1) et dont l'énergie soit E. Soit Γ un domaine quelconque de l'espace des p_i [2]. Les grandeurs p_i seront contenues dans Γ pendant une fraction τ de la durée T. Einstein fait ici l'hypothèse, inspirée par l'existence d'états stationnaires, que le rapport τ/T possède une limite déterminée pour tout domaine Γ lorsque la durée T augmente indéfiniment. Il définit ainsi une *probabilité de présence* du point représentatif d'un système dans tout domaine Γ.

Einstein considère maintenant un très grand nombre N de systèmes indépendants régis individuellement par les équations (1) et possédant

[1] Voir plus haut, p. 151.

[2] C'est-à-dire de l'extension en phase dans le modèle de Boltzmann, et dans le premier mémoire d'Einstein, où les variables sont les coordonnées de Lagrange et leurs moments conjugués.

tous la même énergie E^* à un infiniment petit près. Si, parmi ces N systèmes, on en choisit un au hasard à l'instant arbitraire t, la probabilité de présence du point représentatif de ce système dans le domaine Γ sera constante et égale à $\lim_{T\to\infty} \cdot \tau/T$. Il y aura donc, à un instant quelconque, un nombre de systèmes égal à

$$N \lim_{T\to\infty} \cdot \left(\frac{\tau}{T}\right)$$

présents dans Γ et ce nombre ne devra pas dépendre de l'instant arbitrairement choisi.

Dans un domaine infiniment petit de l'espace des p_i, le nombre des systèmes présents à un instant arbitraire sera par suite de la forme :

$$dN_t = \varepsilon(p_1, p_2, \ldots p_n)\, dp_1 \cdot dp_2 \ldots dp_n.$$

Pour que ce nombre soit indépendant de l'instant arbitraire choisi, c'est-à-dire pour que la répartition soit stationnaire, il faut et il suffit que ε soit, au sens de Jacobi, un dernier multiplicateur du système différentiel (1). Ce dernier multiplicateur est défini à une fonction arbitraire près de l'énergie, laquelle est pratiquement la même pour tous les systèmes [1].

En dernière analyse, en choisissant convenablement de nouvelles variables indépendantes Π_i, on peut écrire :

$$dN = \text{const} \cdot d\Pi_1 \cdot d\Pi_2 \ldots d\Pi_n \tag{2}$$

pour exprimer le nombre de systèmes présents dans un domaine élémentaire de l'espace des Π_i, que l'on substituera dorénavant à l'espace des p_i.

De là, Einstein procède à l'étude d'une interaction particulière *(Berührung)*. Chacun des N systèmes isolés considérés jusqu'ici est supposé composé de deux systèmes partiels Σ et σ en interaction. Soient Π_i les λ variables définissant Σ, π_i les l variables définissant σ, E^* l'énergie totale (constante à dE^* près) d'un système $\Sigma + \sigma$, énergie supposée décomposable, à un infiniment petit près, en deux termes, dont le premier H ne dépend que des Π_i, et le second η ne dépend que des π_i :

$$E^* = H + \eta.$$

[1] A dire vrai, Einstein ne recourt pas à la théorie du dernier multiplicateur, et procède à une analyse directe. Mais il nous paraît inutile de reprendre ici le détail du calcul.

Enfin, η est supposé infiniment petit devant H. Le système σ est donc troublé par un système Σ d'énergie relativement infiniment grande.

Le nombre dN_1 des systèmes compris dans un domaine élémentaire des variables Π_i et π_i est :

$$dN_1 = \text{const} \cdot d\Pi_1 \cdot d\Pi_2 \ldots d\Pi_\lambda \cdot d\pi_1 \cdot d\pi_2 \ldots d\pi_l,$$

ce qui peut s'écrire, l'énergie totale restant constante à un infiniment petit près :

$$dN_1 = \text{const} \cdot e^{-2h(H+\eta)}\, d\Pi_1 \cdot d\Pi_2 \ldots d\Pi_\lambda \cdot d\pi_1 \cdot d\pi_2 \ldots d\pi_l.$$

Si maintenant on intègre pour toutes les valeurs des Π_i compatibles avec une énergie des systèmes Σ comprise entre $E^* - \eta$ et $E^* + dE^* - \eta$, on obtient le nombre de systèmes :

$$dN_2 = \text{const} \cdot e^{-2h\eta}\, d\pi_1 \cdot d\pi_2 \ldots d\pi_l \int e^{-2hH}\, d\Pi_1 \cdot d\Pi_2 \ldots d\Pi_\lambda.$$

On peut alors choisir la constante h de telle manière que l'intégrale selon les Π_i qui figure dans la formule ci-dessus soit indépendante de η. Ce choix, qui est d'ailleurs unique, conduit à la valeur :

$$h = \frac{1}{2}\frac{\omega'(E^*)}{\omega(E^*)} \tag{3}$$

avec

$$\omega(E)\, dE = \int_E^{E+dE} d\Pi_1 \cdot d\Pi_2 \ldots d\Pi_\lambda. \tag{4}$$

Cela posé, dN_2 prend la forme :

$$dN_2 = \text{const} \cdot e^{-2h\eta}\, d\pi_1 \cdot d\pi_2 \ldots d\pi_l. \tag{5}$$

Et l'état du système σ dépend exclusivement de l'état du système Σ par l'intermédiaire de la constante h. Cette constante elle-même définit la « *température absolue* » T de Σ par la relation :

$$T = \frac{1}{4hk}, \tag{6}$$

où k est une constante universelle.

Ainsi l'état du « thermomètre » σ ne dépend que de la température T du système Σ de très grande énergie avec lequel il est en interaction. Inversement, deux systèmes Σ_1 et Σ_2 qui communiquent le même état à un thermomètre σ possèdent la même température.

Einstein vérifie que si σ est une molécule monoatomique de gaz et Σ un gaz idéal répondant au modèle de Maxwell-Boltzmann, la définition précédente de la température absolue coïncide avec celle de la théorie cinétique.

Einstein s'occupe alors des *changements d'états*, en se bornant à ce qu'il appelle des *processus infiniment lents*, où la probabilité de présence de variables d'état dans un domaine donné demeure, à un infiniment petit près, la même qu'en l'état stationnaire. En ce cas, l'énergie E ainsi que les fonctions φ_i des équations d'évolution (1) peuvent dépendre explicitement du temps, mais cela avec des dérivées très petites.

Le système considéré cesse d'être isolé, et les fonctions φ_i dépendent en outre des variables d'état p_i, de paramètres définis par les autres systèmes agissant sur lui.

Le processus est dit « *adiabatique* » si, à chaque instant, les équations (1) demeurent valables, les φ_i dépendant, en dehors des p_i, de paramètres $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ lentement variables. A chaque instant d'un processus adiabatique, il existe une relation de l'énergie

$$\sum_i \frac{\partial E}{\partial p_i} \varphi_i = 0. \tag{7}$$

Le processus est dit « *isopykne* » si le système donné S entre à l'instant initial dans une interaction, au sens défini plus haut, avec un système S′ à température différente. On éloigne le système S′ au bout du temps nécessaire à l'égalisation des températures de S et de S′. L'énergie de S s'est alors altérée d'une quantité dite « *chaleur reçue* ». Les équations (1) cessent d'être valables pendant le processus, mais elles le sont avant et après avec les mêmes fonctions φ_i.

Un processus infiniment lent arbitraire se laisse construire comme une succession de transformations adiabatiques et isopyknes infiniment lentes. On peut écrire, pour un tel processus :

$$dE = \sum \frac{\partial E}{\partial \lambda} d\lambda + \sum \frac{\partial E}{\partial p_i} dp_i.$$

Le second terme est nul dans le cas adiabatique en vertu de (7), du fait que les équations (1) y demeurent valables et si l'on appelle Q la chaleur reçue par le système, également nulle dans le cas adiabatique, on trouve pour un processus infiniment lent quelconque :

$$dE = \sum \frac{\partial E}{\partial \lambda} d\lambda + dQ. \tag{8}$$

Au début et à la fin d'un tel processus, la répartition d'états du système donné est stationnaire — et en faisant l'hypothèse purement formelle que ce système est en interaction avec un autre système d'énergie relativement infiniment grande — peut être définie par :

$$dW = e^{c-2hE}\, dp_1 \cdot dp_2 \ldots dp_n, \tag{9}$$

où dW signifie la probabilité pour que les p_i soient comprises entre les limites p_i et $p_i + dp_i$ et où c est une constante définie par la condition de normalisation :

$$\int e^{c-2hE}\, dp_1 \cdot dp_2 \ldots dp_n = 1,$$

où l'intégrale est étendue à toutes les valeurs des variables.

Par un calcul sur lequel je passe — d'autant que, comme nous le verrons bientôt, Einstein donnera lui-même une formulation plus directe — Einstein définit l'entropie par la relation

$$S = \frac{E}{T} + 2k \log \int e^{-2hE}\, dp_1 dp_2 \ldots dp_n, \tag{10}$$

où l'intégration s'étend à toutes les valeurs des variables et où k est la constante universelle déjà rencontrée (équation (6)).

Einstein recherche enfin la formulation du second principe par la voie statistique.

Il considère un très grand nombre N de systèmes isolés tous représentables par les équations (1) et dont l'énergie soit la même à un infiniment petit près. La répartition des états de ces N systèmes est caractérisée par :

$$dN = \varepsilon\,(p_1, p_2, \ldots p_n, t)\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_n.$$

Si cette répartition est constante (ce qui, d'après les hypothèses faites, est toujours le cas pour de très grandes valeurs du temps t) la probabilité pour que les variables d'état d'*un quelconque* des N systèmes, dans les limites supposées pour l'énergie, soient comprises dans un domaine infiniment petit g de l'espace des p_i sera :

$$dW = \text{const} \cdot \int_g dp_1 dp_2 \ldots dp_n.$$

Si — à l'exemple de Boltzmann — on divise le domaine total de variation des p_i (dans les limites admises pour l'énergie) en l *cellules égales* $g_1, g_2 \ldots g_l$, les probabilités de présence $W_1, W_2, \ldots W_l$ d'un système quelconque dans l'une de ces cellules seront toutes égales à $1/l$.

La probabilité pour que les N systèmes considérés soient, à un instant arbitrairement choisi, répartis à raison de ε_1 systèmes dans g_1, ε_2 systèmes dans g_2, etc., sera donc :

$$W = \left(\frac{1}{l}\right)^N \frac{N!}{\varepsilon_1!\ \varepsilon_2!\ \ldots\ \varepsilon_l!}. \tag{11}$$

D'où, approximativement, comme les ε sont de très grands nombres :

$$\log W = \text{const} - \sum_1^l \varepsilon_i \log \varepsilon_i$$

et si l lui-même est assez grand :

$$\log W = \text{const} - \int \varepsilon \log \varepsilon \, dp_1\, dp_2 \ldots dp_n, \tag{12}$$

l'intégration étant étendue à toutes les valeurs des variables p_i.

Cette dernière relation traduit la probabilité pour que la répartition définie par les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_l$ ou si l'on veut par la fonction $\varepsilon(p_1, p_2, \ldots p_n)$ règne à un instant donné dans l'ensemble des N systèmes.

La répartition *stationnaire*, pour laquelle ε est indépendante des p_i dans les limites admises pour l'énergie, correspond au maximum de W. Si au contraire ε dépend des p_i, W ne peut être extremum et il existe toujours des répartitions infiniment voisines plus probables que la répartition considérée.

Si alors on suit les N systèmes pendant un certain temps, *et que l'on admette que des états plus probables succèdent toujours à des états moins probables*, W augmente constamment jusqu'à ce que la répartition devienne stationnaire et que W soit extremum. Donc pour $t' > t$:

$$-\int \varepsilon' \log \varepsilon' \, dp_1 dp_2 \ldots dp_n \geqq -\int \varepsilon \log \varepsilon \, dp_1 dp_2 \ldots dp_n$$

et comme

$$\int \varepsilon' \, dp_1 \cdot dp_2 \ldots dp_n = \int \varepsilon \, dp_1\, dp_2 \ldots dp_n = N,$$

on pourra écrire

$$-\log \varepsilon' \geqq -\log \varepsilon, \tag{13}$$

si ces deux quantités sont à peu près les mêmes pour les N systèmes.

Einstein examine ensuite le cas d'un nombre fini de systèmes physiques, dont la réunion forme un système total isolé. Ces systèmes peuvent s'influencer adiabatiquement et leurs températures absolues peuvent

être différentes. En ce cas, leurs répartitions d'état sont indépendantes. Si ces systèmes entrent en interaction, le système total restant isolé, on aura au bout d'un certain temps un état global où les états individuels seront stationnaires à un infiniment petit près. Einstein démontre, à l'aide de la définition (10) de l'entropie et de l'inégalité (13), que la somme des entropies des systèmes individuels ne peut qu'augmenter. Le second principe en résulte.

Dans un troisième mémoire daté de Berne le 27 mars 1904, [3], Einstein revient sur la définition de l'entropie.

Considérant un système dont l'énergie ne peut varier que par apport de chaleur, c'est-à-dire non soumis à des influences adiabatiques, Einstein obtient une nouvelle formulation de l'entropie, plus simple que l'expression (10). Il part des équations (3) et (6) qui donnent immédiatement :

$$2h = \frac{\omega'(\mathrm{E})}{\omega(\mathrm{E})} = \frac{d}{d\mathrm{E}}[\log \omega(\mathrm{E})] = \frac{1}{2k\mathrm{T}} \text{ avec } \omega(\mathrm{E})\, d\mathrm{E} = \int_{\mathrm{E}}^{\mathrm{E}+d\mathrm{E}} dp_1\, dp_2 \ldots dp_n.$$

D'où, en l'espèce :

$$\mathrm{S} = \int \frac{d\mathrm{E}}{\mathrm{T}} = 2k \log \omega(\mathrm{E}). \tag{14}$$

Cette expression vaut encore pour tous les systèmes qui subissent des transformations adiabatiques ou isopyknes.

Einstein considère ici les fluctuations de l'énergie d'un système en interaction avec un autre système à la température T et ayant, par rapport au premier, une énergie relativement infiniment grande. Si l'énergie du premier système diffère d'une quantité ε de sa valeur moyenne $\overline{\mathrm{E}}$, le carré moyen de cette fluctuation :

$$\overline{\varepsilon^2} = 2k\mathrm{T}^2 \frac{d\overline{\mathrm{E}}}{d\mathrm{T}}$$

mesure la « stabilité thermique » du système.

Dès ce mémoire apparaît la préoccupation d'Einstein d'appliquer la mécanique au rayonnement.

Einstein et Gibbs

L'opinion scientifique de l'époque ne semble pas avoir prêté une grande attention aux premiers travaux d'Einstein sur la mécanique statistique, qui furent éclipsés par l'apparition simultanée du traité de

Gibbs, daté de New Haven en décembre 1901 et publié à la fois à New York et à Londres en 1902 [1].

La lutte pouvait sembler inégale entre un jeune chercheur encore inconnu, utilisant les loisirs que lui laissait un emploi obscur à l'office des brevets de Berne, et un maître de renommée universelle, entre quelques pages d'une extrême concision et un traité achevé dont l'ordonnance classique devait faciliter la tâche de ceux qui hésitaient à s'égarer dans le labyrinthe des mémoires originaux de Boltzmann.

L'indépendance initiale des recherches d'Einstein et de Gibbs est indiscutable, et d'ailleurs confirmée par les dates. La parenté entre leurs thèses a été parfois présentée comme une de ces rencontres dont l'histoire des sciences est coutumière. Il s'agit ici de parenté et non de véritable similitude. Cette parenté est naturelle dans la mesure où Gibbs et Einstein procèdent tous deux du fonds commun des conquêtes de Boltzmann. Ils en procèdent dans le même esprit, avec le souci d'atteindre à la plus grande généralité.

Rappelons que Boltzmann avait exprimé le premier ce souci dans la seconde partie de la *Gastheorie*, en déclarant : « Nous considérons une molécule comme un système, sur la nature duquel nous ne savons rien, si ce n'est que ses variations sont déterminées par les équations mécaniques générales de Lagrange et d'Hamilton... Nous traiterons ici notre système mécanique de façon à obtenir un nombre infini de systèmes mécaniques de même nature et soumis aux mêmes équations du mouvement, mais en partant de valeurs initiales différentes [2]. »

Mais dans l'œuvre de Boltzmann, l'analyse détaillée des collisions moléculaires jouait encore un grand rôle ; on n'en trouve plus trace ni chez Gibbs, ni chez Einstein. Einstein, dont les références à Boltzmann sont les plus précises, ne cite que les passages de la *Gastheorie* qui répondent au programme dont nous venons de parler.

Nous savons que Gibbs renonçait à toute hypothèse sur la constitution intime de la matière, qu'il faisait de la mécanique statistique une branche de la mécanique rationnelle, et que ses scrupules ne portaient que sur l'interprétation thermodynamique de la mécanique statistique.

La démarche d'Einstein est plus hardie en ce sens qu'il ne doute pas au départ de la possibilité d'obtenir par la voie statistique une définition univoque des grandeurs de la thermodynamique et qu'en outre, avec la théorie du mouvement brownien, il se préoccupera de mettre en évidence la réalité moléculaire.

[1] Une preuve en est que Paul et Tatiana Ehrenfest, dans leur célèbre mémoire de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, bornent leur analyse aux mémoires d'Einstein de 1905 et de 1911.

[2] [2], vol. II, § 25, p. 61, et § 26, p. 64.

Mais, comme nous le verrons bientôt, si Einstein admet, avec Boltzmann, le postulat que des états plus probables doivent succéder à des états moins probables, il fera grief à la théorie cinétique d'avoir parfois, sans justification logique et comme pour les besoins de la cause, admis l'existence de cas d'égale probabilité. Aussi Einstein aura-t-il soin de n'associer en pratique l'entropie à une probabilité que lorsque celle-ci peut revêtir un véritable caractère « statistique ».

Cela dit, il est facile de reconnaître l'identité entre la définition statistique formelle qu'Einstein donne de l'entropie (équation (14) ci-dessus) et la seconde définition de Gibbs : $S = \log V$, afférente à des ensembles microcanoniques [1], à la condition, bien entendu, d'admettre dans ce rapprochement que l'espace des p_i considéré par Einstein se réduise, comme chez Gibbs à l'extension en phase, c'est-à-dire que les « systèmes physiques » au sens d'Einstein se réduisent à des systèmes obéissant aux équations canoniques de la mécanique classique.

Une discussion comparée des thèses de Gibbs et Einstein a été faite de façon très approfondie par P. Hertz, [1]. Signalons seulement qu'après une discussion de vive voix avec cet auteur, Einstein a convenu que l'hypothèse suivant laquelle des répartitions plus probables succèdent à d'autres moins probables ne possède aucun caractère d'évidence. Evoquant lui-même ce débat, Einstein ajoutait :

« J'observerai encore que la voie ouverte par Gibbs dans son livre et qui consiste à partir de la considération d'un ensemble canonique doit, à mon avis, être préféré à celle que j'avais moi-même proposée. Si à l'époque l'ouvrage de Gibbs m'avait été connu, je n'aurais pas dans l'ensemble publié mes propres travaux [sur ce sujet] et me serais limité à traiter de quelques points particuliers. » (Zurich, octobre 1910), [15].

La richesse d'Einstein lui permettait de rendre à Gibbs un hommage qui n'avait en rien le caractère d'une dette. Mais la thèse de Gibbs, si brillante qu'elle fût, ne devait conduire à aucun prolongement en dehors du champ qu'elle entendait codifier. C'est bien de Boltzmann, et de façon précise du mémoire de 1877 où était apparue en toute généralité la signification probabiliste de l'entropie qu'ont pu procéder les découvertes d'Einstein, notamment dans le domaine du rayonnement.

[1] La correspondance serait moins immédiate si l'on se bornait à la première définition de l'entropie donnée par Einstein en 1902 et 1903 (équation (10) ci-dessus). Aussi est-il permis de penser que la thèse de Gibbs était venue à la connaissance d'Einstein en 1904 : l'occasion lui était ainsi offerte de revenir sur l'entropie et d'aborder, à l'exemple de Gibbs, les fluctuations de l'énergie.

Mouvement brownien

Dans son autobiographie scientifique, Einstein soulignera qu'en développant une mécanique statistique et la thermodynamique qui en était connexe, il avait comme but essentiel de mettre en évidence des faits susceptibles d'étayer l'existence d'atomes d'une grandeur finie et déterminée. Il devait s'adresser pour cela au mouvement désordonné de particules en suspension dans un fluide, [5].

Einstein observe d'abord que l'existence de la pression osmotique est une conséquence de la théorie cinétique et que, selon cette théorie, des molécules dissoutes ou des particules en suspension se comportent de la même manière à l'égard de la pression osmotique. Il étudie alors l'équilibre thermodynamique de particules réparties au hasard dans un fluide, en supposant que chacune de ces particules soit soumise individuellement à une force dépendant de sa position, mais indépendante du temps, force qui équilibre la pression osmotique. Si les particules sont assimilables à des sphères de rayon a et si η est le coefficient de viscosité du fluide, le coefficient de diffusion aura pour valeur

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi\eta a} \tag{1}$$

où T est la température absolue, R la constante des gaz parfaits et N le nombre d'Avogadro.

Mais d'autre part, Einstein entreprend l'analyse directe du mouvement désordonné de ces particules :

Chaque particule exécute un mouvement qui est indépendant du mouvement des autres particules ; les mouvements d'une même particule pendant des intervalles de temps distincts sont également indépendants les uns des autres, pour autant que ces intervalles ne soient pas choisis trop petits.

Einstein introduit donc un intervalle de temps τ, qui est très petit devant les intervalles de temps observés, mais qui est cependant assez

grand pour que les mouvements d'une même particule pendant deux intervalles consécutifs de durée τ soient des événements indépendants l'un de l'autre.

Soient donc au total, dans un fluide, n particules en suspension. Dans un intervalle de durée τ, la coordonnée d'une particule suivant l'axe des x augmentera de Δ, quantité ayant pour chaque particule une certaine valeur. C'est dire qu'il existera pour Δ une loi de répartition. Le nombre dn des particules qui subiront dans l'intervalle de temps τ un déplacement compris entre Δ et $\Delta + d\Delta$ sera de la forme :

$$dn = n\varphi(\Delta)\,d\Delta \qquad \text{avec} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\,d\Delta = 1.$$

En outre, $\varphi(\Delta)$ ne sera différent de zéro que pour de très petites valeurs de Δ et on aura de toute évidence :

$$\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta).$$

On suppose que le nombre ν de particules par unité de volume ne dépend que de x et de t, soit $\nu = f(x, t)$ et on calcule la répartition des particules à l'instant $t + \tau$ à partir de leur répartition à l'instant t. Par définition même de $\varphi(\Delta)$, le nombre des particules qui à l'instant $t + \tau$ se trouvent entre les abscisses x et $x + dx$ sera :

$$f(x, t + \tau)\,dx = dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \Delta, t)\,\varphi(\Delta)\,d\Delta.$$

Mais

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t} + \cdots$$

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots$$

Donc

$$f + \tau \frac{\partial f}{\partial t} = f \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\,d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\varphi(\Delta)\,d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta)\,d\Delta + \cdots$$

Dans le second membre, du fait de la parité de $\varphi(\Delta)$ les 2e, 4e, ... termes disparaissent, tandis que les 1er, 3e, ... termes sont de plus

en plus petits. Finalement, compte tenu de la normalisation de $\varphi(\Delta)$, il reste :

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \mathrm{D}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{D} = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2}\varphi(\Delta)\, d\Delta,$$

ce qui est l'équation aux dérivées partielles de la diffusion.

On a supposé dans ce qui précède que les particules étaient rapportées au même système de référence. Mais la chose n'est pas nécessaire, du fait que les mouvements des particules sont indépendants. On peut donc rapporter le mouvement de chaque particule à un système de référence dont l'origine coïncide à l'instant $t = 0$ avec le centre de gravité de cette particule. La quantité $f(x, t)\, dx$ signifiera alors le nombre de particules dont l'abscisse a augmenté entre $t = 0$ et $t = t$ d'une quantité comprise entre x et $x + dx$ et la fonction $f(x, t)$ ainsi entendue continue à satisfaire à l'équation (2). Mais alors pour $t = 0$ et $x \neq 0$:

$$f(x, t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)\, dx = n,$$

ce qui donne

$$f(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}}}\,\frac{e^{-x^2/4\mathrm{D}t}}{\sqrt{t}}$$

et traduit la répartition accidentelle des changements de position intervenus au temps t. On en déduit l'écart quadratique moyen :

$$\overline{x^2} = 2\mathrm{D}t$$

et par rapprochement avec l'équation (1)

$$\overline{x^2} = \frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{N}}\,\frac{t}{3\pi\eta a}.$$

Ainsi, une particule visible au microscope, telle une sphère de 1 micron de diamètre exécutera en 1 seconde, dans l'eau à 17°, un déplacement de 0,8 micron.

Par cette admirable analyse, Einstein parvenait à une loi *quantitative* du déplacement de particules en suspension dans un fluide, loi dont il n'osait affirmer la valeur expérimentale : « Il est possible, écrivait-il, que ces mouvements soient identiques au mouvement brownien, mais

les données dont je dispose au sujet de celui-ci sont si imprécises que je ne saurais rien décider à ce sujet. » Ce n'est qu'après coup que Siedenkopf devait donner à Einstein l'assurance de l'accord entre ses prévisions et l'observation directe du mouvement brownien : magnifique exemple du pouvoir de la déduction théorique.

« L'accord [de cette théorie du mouvement brownien] avec l'expérience, ainsi que la détermination par Planck de la vraie grandeur des molécules à partir de la loi du rayonnement (aux hautes températures) parvint à convaincre les sceptiques, qui étaient très nombreux à l'époque (Ostwald, Mach), de la réalité des atomes. L'antipathie de ces savants à l'égard de la théorie atomique doit être attribuée sans aucun doute à leur attitude de philosophie positiviste. Cela est un exemple intéressant du fait que même des savants d'esprit audacieux et d'intuition avertie peuvent être fermés, par préjugé philosophique, à une interprétation de la réalité. Le préjugé, qui n'a nullement disparu depuis, consiste en la conviction que les faits d'expérience seuls peuvent et doivent donner la connaissance scientifique, sans le recours à une libre construction conceptuelle. Une semblable illusion n'est rendue possible que par la difficulté de se rendre compte à quel point des concepts qui semblent, par vérification et long usage, s'être intégrés au matériel expérimental, demeurent objets de libre choix [1]. »

Entropie du rayonnement, principe de Boltzmann et quanta de lumière

Einstein souligne l'opposition entre l'électromagnétique de Maxwell, qui est une théorie du continu et où l'énergie apparaît comme une fonction continue dans l'espace, et ce qu'il appelle « l'esprit de la physique actuelle » — entendez l'année 1905, si cruciale dans l'œuvre d'Einstein — où l'énergie est une somme suivant des atomes ou des électrons. La théorie ondulatoire de la lumière domine les phénomènes purement optiques ; mais pour comprendre le rayonnement noir, la photoluminescence, la production de rayons cathodiques par la lumière ultra-violette, et d'une façon générale l'émission et l'absorption de la lumière, il est naturel de faire l'hypothèse que l'*énergie de la lumière est répartie de façon discontinue dans l'espace* et se compose de quanta localisés en un nombre fini de points de l'espace, se déplaçant sans se diviser et ne pouvant être émis et absorbés qu'en totalité, [4].

[1] EINSTEIN, *Autobiographisches*, in [19], p. 48.

Ce que l'on a appelé l'*empirisme logique* d'Einstein rejoint ici le conceptualisme de Boltzmann. Plus nettement encore, Einstein observe, à propos de la *Theory of Knowledge* de Bertrand Russel : « Les concepts qui interviennent dans notre pensée et dans notre langage apparaissent tous, si on les considère du point de vue logique, comme de libres créations de l'esprit qui ne peuvent être obtenues par induction à partir de l'expérience sensible. » ([19], p. 279.)

Pour justifier théoriquement cette hypothèse, Einstein fait appel au principe de Boltzmann :

$$S = k \log W,$$

mais, voulant éviter d'avoir à postuler l'existence de cas d'égale probabilité, il s'en tient délibérément à ce qu'il appelle des probabilités « statistiques ». Il considère ainsi un volume v_0 où existent un certain nombre de points (des molécules par exemple). En dehors de ceux-ci, et dans le même volume, il pourra exister autant de points mobiles qu'on voudra, de quelque nature que ce soit. On admet qu'aucune partie de l'espace ni aucune direction n'est privilégiée. Enfin le nombre des points considérés en premier lieu est suffisamment petit pour qu'il n'y ait entre eux aucune interaction.

Au système considéré appartient une certaine entropie S_0. Nous considérons une fraction v du volume v_0 et nous supposons que tous les points, au nombre de n, qui se meuvent indépendamment les uns des autres et qui étaient à un moment donné dans le volume v_0 soient trouvés simultanément dans le volume v. La probabilité de cette circonstance, qui est une probabilité « statistique », est de toute évidence :

$$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^n, \tag{1}$$

ce qui, par application du principe de Boltzmann, conduit à l'entropie :

$$S - S_0 = kn \log \left(\frac{v}{v_0}\right). \tag{2}$$

Pour l'application de cela au cas du rayonnement, Einstein se place délibérément dans le champ de validité de la loi de Wien, c'est-à-dire dans le domaine des petites longueurs d'onde et des faibles densités d'énergie. L'entropie d'un rayonnement monochromatique de fréquence ν, de densité d'énergie suffisamment faible, d'énergie E et occupant le volume v s'exprime, avec Wien par la relation

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta\nu} \log \left(\frac{v}{v_0}\right), \tag{3}$$

où β est le coefficient de la loi de rayonnement de Wien :

$$\varrho_\nu = \alpha\nu^3 e^{-\beta\nu/T},$$

exprimant la densité du rayonnement en fonction de la fréquence et de la température absolue.

Redescendant alors de l'entropie à la probabilité, par le chemin inverse de celui de la théorie cinétique et remplaçant la constante k de la loi de Boltzmann par sa valeur R/N, Einstein parvient aussitôt à la proposition suivante :

Si un rayonnement monochromatique de fréquence ν, de densité d'énergie suffisamment faible et d'énergie E est enfermé dans un volume v_0 à parois réfléchissantes, la probabilité pour qu'à un moment arbitrairement choisi l'énergie totale du rayonnement se trouve dans la partie v du volume v_0 est

$$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{NE}{R\beta\nu}}. \tag{4}$$

D'où la conclusion :

« *Un rayonnement monochromatique de faible densité* (c'est-à-dire dans le domaine d'application de la loi de Wien) *se comporte à l'égard de la théorie cinétique comme s'il était composé de quanta d'énergie indépendants valant chacun* $\frac{R\beta\nu}{N}$. » [4], p. 143.

En effet, dans la traduction de (4) à (1) :

$$n = \frac{NE}{R\beta\nu}.$$

D'où, pour l'énergie d'une particule :

$$\frac{E}{n} = \frac{R\beta\nu}{N} = h\nu \text{ (en introduisant la constante de Planck).}$$

Ainsi apparaissait dans la science moderne, et cela en liaison directe avec le principe de Boltzmann, le premier retour depuis Newton à un aspect corpusculaire de la lumière.

Critique einsteinienne de la théorie de Planck

Einstein ne s'est jamais rallié à la théorie par laquelle Planck avait cherché à valider sa formule de rayonnement. Dès 1905, c'est-à-dire dès son premier mémoire sur la lumière dont nous venons de donner une analyse partielle, Einstein était persuadé du fait que la théorie cinétique, jointe à la théorie électromagnétique de la lumière, ne pouvait mener qu'à la loi de Rayleigh-Jeans.

Revenant sur la question dès l'année suivante, Einstein souligne la contradiction entre l'hypothèse de l'existence des *éléments d'énergie* au

sens de Planck, selon laquelle un résonateur de fréquence ν ne peut émettre ou absorber d'énergie que par multiples du quantum $\varepsilon = h\nu$ et la formule par laquelle, conformément à la théorie électromagnétique, Planck exprime l'énergie moyenne d'un résonateur de fréquence ν en fonction de la densité du rayonnement :

$$U = \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\varrho_\nu. \tag{1}$$

En effet, ces deux aspects de la théorie de Planck ne se pourraient concilier que si le quantum $\varepsilon = h\nu$ était toujours petit devant l'énergie moyenne U. Or, cela est impossible dans le champ de validité de la loi de rayonnement de Wien :

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-h\nu/kT}, \tag{2}$$

c'est-à-dire pour de grandes valeurs de ν/T. En effet, en ce cas, le simple rapprochement des équations (1) et (2) conduit à :

$$\frac{\varepsilon}{U} = e^{h\nu/kT},$$

quantité qui peut alors devenir très grande devant l'unité [1].

Einstein ne va pas jusqu'à infirmer la théorie de Planck ; mais il soutient que celle-ci introduit implicitement l'hypothèse des quanta de lumière, laquelle vient s'ajouter, à l'égard du rayonnement, à l'hypothèse explicite des éléments d'énergie à l'égard des résonateurs [12].

En 1909, Einstein étend cette critique de la théorie de Planck à l'évaluation même des probabilités dans laquelle Planck avait si étroitement suivi Boltzmann :

« Si l'on admet le point de vue que l'irréversibilité des processus de la Nature n'est qu'apparente, et qu'un processus irréversible consiste dans le passage d'un état à un état plus probable, on doit en premier lieu donner une définition de la probabilité W d'un état. La seule définition qui, à mon avis, mérite considération serait la suivante :

» Soient $A_1, A_2, \ldots A_l$ tous les états que peut prendre un système isolé d'énergie donnée ou, d'une façon plus précise, tous les états que nous pouvons différencier en un tel système avec des moyens appropriés. Selon la théorie classique, le système prend au bout d'un temps donné

[1] Par exemple, pour une longueur d'onde de 0,5 μ et une température absolue de 1700, le rapport ε/U atteint $6{,}5 \cdot 10^7$.

un état déterminé (A_l par exemple) et s'y maintient (équilibre thermodynamique). Mais selon la théorie statistique, le système reprend indéfiniment selon une suite irrégulière tous les états $A_1, A_2, \ldots A_l$. (Que cette dernière conception soit la seule valable résulte immédiatement des propriétés du mouvement brownien.) Si on considère le système pendant une très longue durée Θ, celui-ci sera en l'état A_ν pendant une fraction τ_ν/Θ de la durée totale. La valeur limite de cette fraction (quand $\Theta \to \infty$) sera la probabilité W de l'état correspondant A_ν.

» A partir de cette définition on peut établir la relation :

$$S = \frac{R}{N} \log W + \text{const},$$

la constante étant la même pour tous les états de même énergie.

» Ni Boltzmann, ni Planck n'ont donné une définition de W. Ils posent d'une façon purement formelle *(rein formal)* W = nombre des complexions de l'état considéré.

» Si l'on pose comme condition que ces complexions doivent être également probables, en définissant la probabilité d'une complexion d'une façon analogue à celle par laquelle nous avons défini ci-dessus la probabilité d'un état, on retombe sur la définition déjà donnée plus haut de la probabilité d'un état, en éliminant l'élément complexion qui est logiquement inutile.

» Bien que la relation précédente entre S et W ne soit valable qu'à la condition que la probabilité d'une complexion soit définie comme nous l'avons fait, ou de façon analogue, ni Boltzmann, ni Planck n'ont défini la probabilité d'une complexion. Toutefois Boltzmann avait clairement reconnu que le modèle de théorie moléculaire qu'il avait adopté lui prescrivait d'une façon tout à fait précise le choix même qu'il devait faire des complexions : il s'en est expliqué aux pages 404 et 405 de son mémoire *Über die Beziehung...* paru en 1877 aux comptes rendus de Vienne. Planck lui-même n'était pas libre du choix des complexions dans sa théorie du rayonnement. Il n'aurait dû poser simultanément les deux relations :

$$S = \frac{R}{N} \log W \qquad \text{et} \qquad W = \text{nombre des complexions}$$

qu'en introduisant la condition que les complexions devaient être choisies de telle manière qu'elles se trouvent être également probables sur la base de considérations statistiques dans l'image théorique qu'il avait adoptée. Il serait parvenu par cette voie à la formule défendue par Jeans.

Les physiciens doivent être unanimes à se réjouir que Planck ait si heureusement écarté semblable condition, mais cela ne doit pas faire oublier que sa formule du rayonnement est incompatible avec la base théorique dont il est parti [1]. »

Il semble que Boltzmann sorte blanchi, en fait sinon en droit, de cette sévère critique einsteinienne. Nous avons d'ailleurs déjà eu l'occasion de noter, à propos de l'attitude de Boltzmann devant la mécanique statistique, que la difficulté de définir les cas d'égale probabilité ne lui avait pas échappé [2]. Quant à Planck, il semble que, de l'avis même d'Einstein, il a mieux valu pour la science qu'il ne se soit pas trop soucié de logique...

[1] [13], pp. 187-188.
[2] Voir plus haut, p. 120.

De la formule de Planck à la dualité onde-corpuscule en théorie de la lumière

Einstein ne s'est pas borné à cette critique ; il a cherché à concevoir une théorie de la lumière qui fût en accord avec la théorie de la relativité, et cela l'a conduit à suggérer une structure dualistique, à la fois ondulatoire et corpusculaire, du rayonnement.

Pour Einstein, l'hypothèse de l'éther était condamnée : la relativité restreinte l'avait rendue superflue *(überflüssig)*. En outre, tout un groupe de faits expérimentaux avaient révélé que certaines propriétés fondamentales de la lumière se laissent mieux expliquer du point de vue de la théorie newtonienne de l'émission que du point de vue de la théorie des ondulations :

« Selon mon sentiment, écrit Einstein en 1909, la prochaine phase du développement de la physique théorique nous apportera une théorie de la lumière qui apparaîtra comme une sorte de fusion *(Verschmelzung)* des théories de l'émission et des ondulations [1]. »

Invoquant l'inertie de l'énergie, Einstein observe que la masse d'un corps émettant de l'énergie en quantité L diminue de L/c^2, où c est la vitesse de la lumière :

« La théorie de la relativité modifie par conséquent notre conception de la nature de la lumière ; celle-ci n'apparaît plus comme provenant de la succession des états d'un milieu hypothétique, mais comme un élément *sui generis* analogue à la matière [2]. »

Se référant à l'émission secondaire de rayons cathodiques à partir de rayons X, Einstein estime que le processus élémentaire d'émission de rayonnement semble *dirigé*, contrairement à ce qu'indiquerait la théorie des ondulations.

Pour analyser de plus près la structure du rayonnement, Einstein se propose une voie inverse de celle que Planck avait suivie : admettant

[1] [14], p. 817.
[2] *Ibid.*, p. 820.

comme vérifiée par l'expérience la *formule de rayonnement* de Planck, en déduire les conséquences possibles quant à la constitution même du rayonnement.

Pour cela, Einstein considère, dans une enceinte remplie d'un gaz idéal, une plaque solide pouvant se mouvoir librement, mais seulement perpendiculairement à son plan. Cette plaque sera mise en mouvement, sous l'effet des chocs des molécules de gaz, de telle manière que son énergie cinétique moyenne soit égale au tiers de l'énergie cinétique d'une molécule monoatomique de gaz.

On admet en outre que dans l'enceinte existe un rayonnement de même température que le gaz. Le rayonnement exerce une pression sur les deux faces de la plaque ; du fait du mouvement de celle-ci, il y a surpression sur la face antérieure (instantanée) : la résultante des pressions est une force opposée au mouvement de la plaque, que l'on peut appeler frottement de rayonnement *(Strahlungsreibung)*. Pour que l'équilibre thermique soit possible, il faut que les oscillations de la pression du rayonnement compensent en moyenne les pertes dues à ce frottement, en sorte que l'énergie cinétique de la plaque reste en moyenne égale au tiers de l'énergie cinétique d'une molécule monoatomique de gaz.

On peut encore choisir la plaque de telle façon qu'elle réfléchisse parfaitement le rayonnement de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$ et se laisse traverser sans absorption par les rayonnements d'autre fréquence.

En désignant par Δ la quantité de mouvement transmise à la plaque pendant le temps τ du fait des oscillations irrégulières de la pression de rayonnement, et par $\overline{\Delta^2}$ le carré moyen de cette quantité de mouvement, Einstein obtient :

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{c}\left[h\nu\varrho + \frac{c^3\varrho^2}{8\pi\nu^2}\right] f\tau d\nu,$$

où f est la surface de la plaque [1].

La théorie des ondulations n'exprime que le second terme de cette expression. Le premier terme, prépondérant dans le domaine de validité de la loi de rayonnement de Wien, s'explique par l'existence d'individus localisés possédant l'énergie $h\nu$, se déplaçant et se réfléchissant indépendamment les uns des autres.

Et Einstein conclut :

« La formation des champs électromagnétiques de la lumière est liée à des points singuliers, de même que celle des champs électrostatiques

[1] Le mouvement de la plaque est entièrement analogue au mouvement brownien de particules en suspension.

d'après la théorie des électrons. Il n'est pas exclu que dans une telle théorie l'énergie totale du champ électromagnétique puisse être considérée comme localisée dans ces singularités, de même que dans l'ancienne théorie des actions à distance. J'imagine un tel point singulier comme entouré d'un champ de force qui possède au fond le caractère d'une onde plane et dont l'amplitude décroît avec la distance à ce point singulier. Si de nombreuses singularités sont présentes à des distances faibles devant les dimensions du champ d'un point singulier, leurs champs se recouvriront et dans leur ensemble donneront un champ de force ondulatoire qui sera peu différent d'un champ ondulatoire au sens de l'actuelle théorie électromagnétique... Je voudrais seulement suggérer que les deux structures (ondes et quanta) qui selon la formule de Planck doivent toutes deux intervenir dans le rayonnement, ne sont pas à considérer comme mutuellement incompatibles [1]. »

Dans l'hommage qu'il a rendu à la mémoire d'Einstein, L. de Broglie a tenu à marquer à quel point sa propre construction de la mécanique ondulatoire avait été inspirée par la méditation de cet exemple : « Une grande lumière se fit alors soudain dans mon esprit. Je fus convaincu que le dualisme des ondes et des corpuscules découvert par Einstein dans sa théorie des quanta de lumière était absolument général et s'étendait à toute la nature physique et il me parut dès lors certain qu'au mouvement d'un corpuscule quelconque, qu'il soit photon, électron, proton ou autre, est associée la propagation d'une onde [2]. »

Nous arrêtons ici ces prolongements de l'entropie boltzmannienne où s'est employé le génie d'Einstein, non sans arbitraire d'ailleurs. Car il suffirait d'évoquer les considérations d'Einstein sur la statistique de Bose pour retrouver, à propos de la *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*, le principe de Boltzmann et même les complexions et probabilités au sens de Planck.

[1] [14], pp. 824-825.

[2] De son côté, Einstein, saisi de la thèse où L. de Broglie généralisait à la réalité physique tout entière le redoutable dualisme des ondes et des corpuscules, devait déclarer que celui-ci avait « soulevé un coin du grand voile » *(eine Ecke des grossen Schleiers gelüftet)*.

CHAPITRE X

Sur un débat moderne : interprétation soit probabiliste, soit causale de la mécanique quantique

L'histoire de la science ne se répète pas, et il serait vain d'appeler en garantie l'autorité de Boltzmann à l'occasion des débats qui agitent actuellement la physique théorique.

Et cependant la crise qui s'est produite, après vingt-cinq ans de stabilité presque complète, dans le domaine de l'interprétation des théories quantiques n'est pas sans présenter une analogie profonde avec le débat qui avait opposé la phénoménologie énergétiste à l'atomistique boltzmannienne. Telle est la raison pour laquelle nous terminerons cette étude par une brève analyse du courant qui s'efforce d'élaborer une micromécanique sous-jacente à la théorie purement probabiliste qui dominait depuis 1927 en ce domaine de la physique théorique. Nous y puiserons, semble-t-il, de nouvelles raisons de croire en la valeur des idées que Boltzmann, prêchant alors dans le désert, avait défendues avec tant de courage et tant de passion dans la poursuite de ce qu'il pensait être l'objet et le but de la science.

L'attitude phénoménologique peut constituer, certes, une utile réaction devant la multiplicité, la complexité, l'arbitraire ou les inconséquences logiques, en un mot devant les excès de toute nature des modèles ayant initialement servi de support à la pensée créatrice : on axiomatise en réduisant le nombre des concepts et des postulats ; on fait litière de certains traits des modèles primitifs dans le souci de construire un bel édifice logique qui paraisse à la fois nécessaire et suffisant. Ce faisant, on constitue le plus souvent une théorie fermée, susceptible certes de livrer des faits nouveaux, mais codifiée dans son cadre et interdisant par principe certaines recherches, certains concepts, certaines images qui permettraient de s'évader de la construction parfaite que l'on a cru édifier.

La phénoménologie est ainsi limitée dans ses fruits par ses exigences mêmes : ce n'est certes pas une attitude stérile, mais ce n'est pas, en général, une attitude motrice. Telle est sans doute la raison pour laquelle les grands novateurs ne s'y laissent pas volontiers enfermer. Parmi ceux,

et non des moindres, qui ont refusé d'adhérer à l'interprétation phénoménologique de la mécanique quantique ou qui ne l'ont acceptée qu'à regret et pour un temps, on peut citer Einstein, L. de Broglie et Schrödinger.

L'attitude souvent intransigeante adoptée par les tenants de la phénoménologie ne va-t-elle pas au-delà de l'essence même des théories physiques ? Si imbue qu'elle soit de rigueur logique et de pureté formelle, la phénoménologie n'est jamais entièrement dégagée de la pensée intuitive qui, la plupart du temps, lui a donné naissance. Cela, les leçons de Boltzmann nous l'ont appris, dans le cadre où s'exerçait la science de son temps ; il n'en va pas autrement aujourd'hui.

La mécanique quantique au sens d'Heisenberg, Born, Jordan, Pauli et Dirac est l'héritière directe d'un modèle : l'atome de Bohr, si naïf que ce modèle puisse aujourd'hui paraître. Héritière directe, sinon exclusive, car le courant ondulatoire au sens de L. de Broglie, bien que l'ayant précédée, ne l'a pas influencée à l'origine. Cette filiation n'a pas empêché les tenants de cette mécanique d'adopter résolument l'attitude phénoménologique qu'Heisenberg a qualifiée de *Kopenhagener Geist der Quantentheorie*. On pourrait encore plaider que l'atome de Bohr n'était pas un modèle au sens traditionnel de la mécanique. Certes, il comportait des trajectoires (privilégiées), des points matériels, des champs de force, mais il avait des éléments inconnaissables, il comportait déjà des renoncements : le saut d'une trajectoire stationnaire à une autre était inanalysable et inanalysé. La voie était donc ouverte à une transformation phénoménologique de ce modèle en un simple catalogue des fréquences et des niveaux d'énergie : c'était là le programme tracé par Heisenberg dès le premier mémoire où il s'évadait du modèle de Bohr en « affinant » le principe de correspondance [1].

Mais la mécanique quantique n'a pas su se dépouiller entièrement du

[1] Attitude plus facile à affirmer qu'à suivre, ainsi que Born et Heisenberg l'ont eux-mêmes noté, dans leur rapport au Conseil Solvay de 1927 :

« La mécanique des quanta essaye d'introduire les nouvelles notions par une analyse précise de ce qui est *essentiellement observable*. Cela ne revient pas à établir le principe qu'il est possible et même nécessaire de faire une séparation nette entre ce qui est « observable » et ce qui est « inobservable ». Dès qu'un système de concepts est donné, on peut conclure des observations à d'autres faits qui à proprement parler ne sont pas directement observables, et la limite entre ce qui est observable et ce qui ne l'est pas devient tout à fait indéterminée. Mais lorsque le système de concepts est lui-même encore inconnu, on ne s'intéresse tout naturellement qu'aux observations elles-mêmes, sans en tirer des conclusions, parce qu'autrement des idées fausses et d'anciens préjugés s'opposent à l'intelligence des relations physiques. Le nouveau système de concepts donne en même temps le contenu intuitif de la nouvelle théorie. D'une théorie intuitive en ce sens on doit donc demander uniquement qu'elle soit en elle-même sans contradiction et qu'elle permette de prédire sans ambiguïté les résultats de toutes les expériences imaginables dans son domaine. La mécanique des quanta sera dans ce sens une théorie intuitive et complète des processus micromécaniques. » (Cf. Solvay, [1], pp. 143-144.)

modèle : quand Dirac, auteur d'une si remarquable algèbre des états et des observables, nous parle de l'hamiltonien d'un système quantique, formulé par analogie avec le système correspondant de la dynamique classique, il nous ramène ainsi à une image mécanique ; encore que les variables quantiques q et p homologues des coordonnées et des quantités de mouvement au sens habituel ne puissent s'actualiser respectivement que dans les mesures avec certaines probabilités : en dehors des mesures, les q et p sont de purs symboles, à l'aide desquels il serait illusoire de chercher à suivre dans le temps une position, une vitesse, une trajectoire ; la chose nous est d'ailleurs interdite « *en droit* » dans le cadre de l'interprétation probabiliste orthodoxe. De même, la mécanique quantique emprunte au courant ondulatoire l'équation de Schrödinger et sa fonction d'onde ψ ; mais celle-ci est qualifiée d'onde de probabilité et dépouillée de toute signification physique.

Pour révolutionnaire que fût l'idée de doter la matière de propriétés ondulatoires avant que l'on ait eu connaissance du moindre phénomène de diffraction correspondant, le courant ondulatoire était à l'origine (1923) fondé sur des images intuitives faisant partie du bagage du physicien : au corpuscule, d'ailleurs relativiste, était associée une onde et celle-ci avait un caractère physique. Lorsque Schrödinger étendit l'association ainsi instituée par L. de Broglie entre ondes et particules à des systèmes dynamiques plus complexes, l'onde elle-même devint plus abstraite en se situant dans l'espace de configuration et non plus dans l'espace physique habituel.

L'opposition entre les deux courants n'était pas mathématique, car Schrödinger devait montrer à cet égard l'équivalence entre les mécaniques ondulatoire et quantique. Elle résidait, et réside encore, dans le domaine de l'interprétation. Or le choix entre les différentes interprétations d'une théorie mathématisée est, en physique, un problème que l'on ne peut éluder : témoin le passage de Lorentz à Einstein dans la dynamique de l'électron, substituant le temps relatif au temps absolu et éliminant l'éther en tant que système de référence au repos absolu.

Sur ce terrain de l'interprétation, les tenants du courant quantique, parfaitement organisés dès 1927, ont remporté un indiscutable succès tactique. Citons les traits les plus caractéristiques de leur thèse, telle que Born et Heisenberg l'avaient exprimée au Conseil Solvay :

Les discontinuités introduisent dans la physique de l'atome un élément statistique. Cet élément statistique constitue une partie *essentielle* des bases de la mécanique des quanta ; d'après celle-ci, l'allure d'une expérience ne peut, dans beaucoup de cas, être déduite des conditions initiales que d'une manière statistique ; du moins, si l'on considère, pour établir les conditions initiales, uniquement les expériences imaginables en principe jusqu'ici. Cette

conséquence de la mécanique des quanta peut être contrôlée empiriquement. Malgré son caractère statistique, la théorie rend compte de la détermination en apparence tout à fait causale des processus microscopiques. En particulier, les principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement sont exacts même dans la mécanique des quanta. *Il semble donc qu'il n'y ait aucun argument d'ordre empirique qui s'oppose à ce qu'on admette en principe l'indétermination du microcosme...*

Le système des formules de la mécanique des quanta ne peut être interprété sans contradiction que du point de vue d'un *indéterminisme fondamental...*

La mécanique des quanta représente un fusionnement de la mécanique et de la statistique, *d'où les microcoordonnées non observables sont chassées.*

Nous attribuons à la matière une double nature : sa description exige que nous parlions de corpuscules (discontinuités) aussi bien que d'ondes (processus continus). Du point de vue de la conception statistique de la mécanique des quanta, on voit clairement comment cela est conciliable : les ondes sont des ondes de probabilité. Ce ne sont pas, à vrai dire, les probabilités elles-mêmes, mais certaines *amplitudes de probabilité* qui se propagent continûment et satisfont à des équations différentielles ou intégrales, comme dans la physique du continu classique. Mais à côté de cela il y a des discontinuités, des corpuscules, dont la fréquence est réglée par le carré de ces amplitudes [1].

Ce n'est pas ici le lieu de rappeler comment cette interprétation, adoptée par la grande majorité des physiciens, a régné en fait pendant vingt-cinq ans et pourquoi elle a été récemment remise en question. L. de Broglie l'a exposé dans un témoignage d'une admirable sincérité dont tout commentaire serait superflu [2].

Bornons-nous donc à caractériser schématiquement les deux thèses en présence :

— D'une part une attitude phénoménologique, rejetant tous les modèles, ne s'interrogeant pas sur la structure et le comportement des éléments individuels en dehors des expériences auxquelles ils peuvent être soumis [3] et aboutissant à un *probabilisme essentiel* dans l'analyse expérimentale relative à chacun de ces éléments, ce probabilisme interdisant toute possibilité d'un déterminisme sous-jacent. Illustrant cette attitude sur le plan de l'interprétation physique, Bohr a élaboré la célèbre

[1] Cf. Solvay, [1], pp. 144-145, 160, 164-165.

[2] [6], p. 1-22.

[3] Citons ici Dirac : « Les notions d'onde et de particule doivent être considérées comme deux abstractions utilisées pour décrire une seule et même réalité physique. On ne doit pas se représenter cette réalité comme quelque chose contenant à la fois des ondes et des particules qui réagissent les unes avec les autres, ni essayer de construire un mécanisme qui puisse décrire correctement leurs rapports tout en rendant compte du mouvement réel des particules. Toute tentative de ce genre irait directement à l'encontre des principes qui sont à la base des progrès de la physique moderne. La mécanique quantique ne fait que tenter de formuler les lois fondamentales de telle manière qu'on puisse en déduire sans ambiguïté ce qui se passe dans des conditions expérimentales données. Tout essai pour pénétrer dans le mécanisme des relations entre ondes et particules plus profondément que ne l'exige ce but précis serait inutile et dénué de sens. » ([1], p. 2.)

doctrine de la *complémentarité*, aux termes de laquelle on ne peut espérer saisir le réel que sous des aspects partiels qui s'excluent mutuellement.

— D'autre part, une théorie structurelle, postulant l'existence objective, même en dehors de toute expérience, d'individus ayant à la fois le caractère corpusculaire et des propriétés ondulatoires ; individus dont on se propose de suivre le comportement et l'évolution sous des conditions extérieures données, évolution qui peut être déterministe, sous l'influence de champs d'une nature nouvelle dits *champs quantiques*, dont l'effet s'ajoute aux champs de force classiques : la mécanique quantique habituelle, au niveau phénoménologique où elle s'est délibérément placée, traduirait alors la statistique d'ensembles de micro-objets identiques soumis au même champ quantique.

Ce qui a surtout retenu l'attention en ce débat, c'est l'opposition entre le probabilisme systématique du courant quantique orthodoxe et le déterminisme recherché ou simplement désiré par le nouveau courant. Cette opposition est manifeste ; mais elle ne doit pas faire oublier l'antinomie, plus radicale encore semble-t-il, entre phénoménologie et physique du modèle, ce dernier terme étant pris ici au sens des images très complexes et très élaborées où la pensée du chercheur peut trouver son support et chercher sa voie. Encore qu'ils aient parfois revêtu la forme de théorèmes mathématiques ou de savantes théories logiques, les interdits prononcés par les tenants de la mécanique quantique orthodoxe à l'égard de toute tentative cherchant à explorer les éléments sous-jacents au niveau régi par l'onde de probabilité relèvent, comme l'a souligné J. P. Vigier, d'une position philosophique et non d'une nécessité expérimentale : « Il n'existe pas d'expérience qui prouve que l'échange d'énergie par quanta soit nécessairement inanalysable, pas de théorème qui permette de le démontrer [1]. »

A cet égard, les savants qui cherchent à développer le courant intuitif de la dualité onde-corpuscule sont, vis-à-vis des orthodoxes de la mécanique quantique actuelle, dans une position entièrement analogue à celle de Boltzmann, atomiste impénitent devant les énergétistes de son temps [2].

[1] Cf. J. P. Vigier, [1], p. 9.

[2] C'est ainsi que W. Pauli écrit à Max Born : « En opposition avec tous les efforts rétrogrades (Schrödinger, Bohm et dans un certain sens Einstein), je suis persuadé que le caractère statistique de la fonction ψ, et par suite les lois de la nature que vous avez, dès l'origine, soutenues énergiquement contre l'avis de Schrödinger, détermineront le style de toutes les lois pour au moins quelques siècles. Il est possible que, plus tard, par exemple en connexion avec les processus de la vie, quelque chose d'entièrement nouveau puisse être trouvé ; mais rêver à un retour en arrière, un retour au style classique de Newton et de Maxwell (et ce ne sont que des rêves auxquels ces messieurs se livrent) me semble sans espoir, hors de saison et de mauvais goût. Et nous pourrions ajouter : ce ne serait pas un rêve agréable. » (*The British Journal for the Philosophy of Science*, vol. IV, N° 14, août 1953, p. 106.)

Il ne peut être question, dans le cadre des remarques générales que nous avons en vue, d'entrer dans les détails techniques, d'ailleurs extrêmement complexes, de ces discussions. Aussi nous bornerons-nous ici à en évoquer les aspects les plus élémentaires.

Dans l'interprétation dite « causale », chaque micro-objet est à la fois et simultanément particule et onde : à la microparticule est associé un champ propre étendu qui la rend sensible à des modifications de *conditions aux limites macroscopiques*, comme par exemple la présence ou l'absence de trous dans un écran [1].

La *théorie de l'onde pilote*, présentée par L. de Broglie au Conseil Solvay de 1927, repose sur la double hypothèse de l'existence d'un champ continu

$$\psi = \mathrm{R} \exp\left(\frac{i\mathrm{S}}{\hbar}\right)$$

satisfaisant à l'équation de Schrödinger et sur l'obligation, pour la particule considérée de masse m et de vitesse v, de suivre les trajectoires particulières définies par

$$m\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{S},$$

le tout à l'*approximation newtonienne*.

Dans cette théorie, la séparation des parties réelle et imaginaire de l'équation de Schrödinger donne, d'une part, l'équation de Jacobi généralisée :

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{S})^2 + \mathrm{V} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta \mathrm{R}}{\mathrm{R}} = 0$$

où, à côté du potentiel classique V s'introduit le *potentiel quantique* :

$$\mathrm{Q} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta \mathrm{R}}{\mathrm{R}}$$

et, d'autre part, une équation de continuité

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\mathrm{P} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{S}}{m}\right) = 0,$$

où $\mathrm{P} = \mathrm{R}^2$ représente la densité d'un ensemble de particules identiques associées au champ ψ.

[1] Cette circonstance est de nature à permettre à l'interprétation causale d'échapper à certaines objections opposées à l'interprétation probabiliste orthodoxe. Voir par exemple EINSTEIN, Conseil Solvay, 1927, [1], pp. 255-256 ; *Quantenmechanik und Wirklichkeit*, [20], in *Dialectica* 7/8, 1948, pp. 320-323, et SCHRÖDINGER, [1], *Naturwissenschaften*, vol. 23, 1935, pp. 807, 823, 844.

On a fait grief à cette théorie de faire jouer à la même fonction R deux rôles inconciliables, savoir :

— définir un potentiel quantique réel agissant sur les trajectoires ;

— définir une densité de probabilité des particules associées à ces mêmes trajectoires.

Tout se passe alors comme si le mouvement d'une particule était conditionné par l'ensemble des mouvements possibles. W. Pauli, probabiliste convaincu, pouvait ainsi reprocher à la théorie de l'onde pilote, qui se voulait déterministe, de comprendre une hypothèse statistique inexpliquée.

David Bohm a proposé en 1952 et 1953, [1], [2], et cela semble-t-il sans avoir eu, au moins initialement, connaissance du précédent de 1927, deux nouvelles interprétations des équations mêmes de la théorie de l'onde pilote.

a) *Première interprétation.*

Chaque micro-objet est constitué par une onde *physique* :

$$\varphi = \mathrm{R} \exp\left(\frac{i\mathrm{S}}{\hbar}\right),$$

laquelle satisfait à l'équation de Schrödinger, et par une particule associée à cette onde et dont la quantité de mouvement est

$$m\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{S}.$$

Dans un esprit analogue à celui de la théorie cinétique, Bohm admettait que si on ignore les conditions initiales précises (position et vitesse) de chaque particule, les ensembles statistiques de micro-objets identiques sont régis par la densité

$$\mathrm{P} = |\varphi|^2.$$

A cette interprétation, plus fruste à vrai dire que la théorie initiale de l'onde pilote, J. P. Vigier reproche le fait que le champ φ, mathématiquement complexe, ne peut être tenu pour un champ ordinaire. D'autre part, on ne peut retomber sur la mécanique classique en faisant tendre simplement $\hbar$ vers zéro dans l'expression du champ φ.

b) *Seconde interprétation.*

Pour lever ces objections, Bohm a proposé la nouvelle interprétation suivante :

Chaque micro-objet est caractérisé :

— par une particule dotée à chaque instant d'une position bien définie et d'une quantité de mouvement :

$$m\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\, S\,;$$

— par un *champ quantique réel* Q, calculable à l'aide d'une fonction auxiliaire $\varphi = R \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)$ satisfaisant à l'équation de Schrödinger, soit :

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta R}{R}.$$

La particule se meut conformément à la loi

$$m\vec{\gamma} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(Q + V),$$

où V est le potentiel classique, mais cela seulement sur les trajectoires définies par $m\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\, S$.

Enfin, la densité d'un ensemble de particules associées à un même champ Q est $P = R^2$.

L. de Broglie a fait observer que, dans les problèmes concrets, il est nécessaire de se donner les conditions aux limites sur le champ φ, ce qui introduit une liaison entre Q et S, c'est-à-dire entre le champ quantique et les trajectoires : on retombe ainsi sur l'objection principale déjà faite à la théorie de l'onde pilote de comporter une hypothèse statistique inexpliquée.

Je passe sur l'extension de la théorie de l'onde pilote aux équations d'onde relativistes des particules à spin et me bornerai à mentionner le principe de la théorie dite de la *double solution* issue des travaux de L. de Broglie [1]. Cette théorie, de même que la relativité généralisée, vise à supprimer le dualisme dont souffrait la physique classique entre champ de force et lois du mouvement des éléments matériels, en assimilant les particules à des singularités du champ. Chaque micro-objet est ainsi représenté par une onde u satisfaisant à une équation *non linéaire* et comportant une région singulière, en sorte que $u = u_0 + v$: à distance suffisante du centre de la région singulière, l'onde u se réduit pratiquement à v, tandis qu'au contraire, dans cette région, v disparaît pratiquement devant u_0. Des conditions de raccordement, dites *conditions de guidage* doivent exister entre u_0 et v, au voisinage de la frontière de la région singulière. Enfin, à distance suffisante de la région singulière $u \cong v$ doit être proportionnelle à l'onde statistique ψ satisfaisant à l'équation linéaire de la mécanique quantique usuelle.

[1] Cf. [6], pp. 29-54, et [8].

La *non-linéarité* de l'équation de l'onde u joue un rôle essentiel :

Einstein a souligné que, si une équation de champ est linéaire, on peut toujours trouver une solution à singularité où la singularité a un mouvement prescrit à l'avance... De plus, on peut superposer à la solution à singularité une solution continue sans que la seconde exerce aucune influence sur la première... Pour qu'automatiquement la région singulière se trouve être *guidée* par le champ environnant, il faut sortir du domaine de la linéarité et faire reposer la théorie sur des équations non linéaires. C'est parce qu'en relativité généralisée les équations du champ sont non linéaires que MM. Darmois et Einstein ont pu trouver, sans aucun postulat supplémentaire, une loi de guidage des particules par le champ. En transposant ces idées dans l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution, on voit que, si l'on désire tenter d'établir entre le corpuscule et l'onde une solidarité qui ne peut exister dans une théorie linéaire, il apparaît comme naturel d'introduire des équations de propagation non linéaires.

On peut même penser que, si la Mécanique ondulatoire actuelle n'arrive pas à préciser clairement les rapports de l'onde et du corpuscule, cela est dû à ce qu'elle s'enferme a priori *dans le cadre d'une théorie linéaire* [1].

On sait d'autre part que Schrödinger avait proposé d'assimiler un corpuscule à un groupe d'ondes de fréquences très voisines se propageant dans des directions comprises à l'intérieur d'un cône très délié, et s'était fait objecter l'étalement du groupe d'ondes au cours du temps. Or, la non-linéarité de l'équation des ondes permet d'imaginer des groupes d'onde sans étalement [2].

Ces quelques indications étant données, revenons à la comparaison des deux interprétations.

De même que la phénoménologie énergétiste se refusait à admettre l'existence d'un atomisme problématique qui aurait sous-tendu la thermodynamique macroscopique, l'interprétation orthodoxe de la mécanique quantique considère par principe comme inanalysable l'interaction entre appareils de mesure et éléments individuels. A une grandeur physique correspond un spectre de valeurs propres régi par la fonction ψ, et dont une seule s'actualise par la mesure.

Rien n'interdit au contraire, dans l'interprétation causale, d'étudier le processus même de la mesure par l'intermédiaire d'un hamiltonien d'interaction entre l'appareil de mesure et un micro-objet. C'est sans doute l'un des traits les plus originaux de la thèse de D. Bohm que le fait d'avoir abordé cette étude en se bornant, ce qui d'ailleurs ne réduit pas en fait la généralité, à une interaction quasi instantanée pour que ni l'appareil de mesure, ni le micro-objet n'aient le loisir d'évoluer pour leur propre compte en dehors de cette interaction.

[1] L. de Broglie, [8], p. 217.
[2] *Ibid.*, pp. 241-247.

L'évolution du système total (micro-objet et appareil de mesure) est décrit par une fonction d'onde satisfaisant à l'équation de Schrödinger. Les paquets d'onde qui correspondent aux différentes valeurs possibles de l'observable à mesurer attachée au micro-objet se séparent après l'interaction et la variable correspondante de l'appareil de mesure entre alors dans un paquet déterminé, sous réserve bien entendu d'une sensibilité minimum de l'appareil de mesure.

Tout cela s'entend d'un seul micro-objet ; si on considère maintenant un ensemble de micro-objets identiques ayant même partie régulière de leur fonction d'onde, on retrouve un spectre de valeurs de l'observable en cause régi par la même distribution de probabilités que dans l'interprétation orthodoxe. Corrélativement, le principe d'incertitude d'Heisenberg ne s'applique plus aux mesures effectuées sur des micro-objets individuels, dont rien n'interdit en théorie, dans le cadre de l'interprétation causale, de décrire le mouvement, mais seulement aux mesures effectuées sur des ensembles de micro-objets. Ce principe cesse ainsi « en théorie causale d'exprimer une limitation fondamentale, à jamais inexplicable, de la précision avec laquelle on peut mesurer simultanément la position et l'impulsion d'*un* micro-objet [1] », pour prendre une simple valeur statistique à l'égard de mesures portant sur des ensembles.

En bref, l'onde de probabilité de la mécanique quantique habituelle ne traduirait pas, comme l'entend l'interprétation orthodoxe, l'ensemble des connaissances que les mesures nous permettent d'acquérir sur *un* micro-objet ; la mécanique quantique actuelle serait une théorie de nature statistique, applicable seulement aux ensembles de micro-objets. Et le but de la théorie causale serait précisément d'expliciter le modèle micromécanique sous-jacent à la théorie probabiliste actuelle.

L'interprétation causale se doit d'une façon générale, pour répondre aux objections dont nous avons parlé, de retrouver, en les validant, toutes les régularités statistiques de l'interprétation orthodoxe. Elle revient ainsi aux principes mêmes de la théorie cinétique de Maxwell-Boltzmann, en restituant au calcul des probabilités « le but de décrire correctement la façon dont certains événements se produisent réellement dans un ensemble très grand d'événements soumis à des lois causales sous-jacentes très complexes ». Le hasard qui s'introduit alors est celui qu'accepterait la science du XIXe siècle comme traduisant notre ignorance de fait des détails d'une situation en principe déterminée, par opposition à la contingence pure de l'interprétation essentiellement indéterministe.

[1] J. P. Vigier, [1], p. 164.

Pour retrouver ainsi les régularités statistiques de la mécanique quantique usuelle, D. Bohm et J. P. Vigier considèrent un ensemble de particules sans interaction ayant même partie régulière φ de leur fonction d'onde. Ces particules sont astreintes à suivre les lignes de courant d'un fluide pilote dont la densité et la vitesse subissent des fluctuations dues aux oscillations aléatoires des champs et des conditions aux limites. Ce fluide se raccorde, en dehors des fluctuations, au fluide pilote défini par φ. Ces fluctuations sont supposées conserver le champ quantique et constituer un processus de Markoff non stationnaire, continu et apériodique. Sous ces hypothèses, Bohm et Vigier établissent, par une démonstration inspirée de la théorie du mouvement brownien, que la distribution des particules tend vers une limite stable proportionnelle à $|\varphi|^2$. Cette répartition jouerait donc, par rapport à la micromécanique, un rôle analogue à la répartition de Maxwell-Boltzmann en théorie cinétique : établie à la faveur de fluctuations conservant le champ quantique, elle ne peut être détruite par de telles fluctuations.

Ce qu'il convient de souligner dans la discussion qui nous occupe ici entre phénoménologie et physique des images, ce n'est pas seulement la possibilité ainsi révélée pour l'interprétation causale d'intégrer à nouveau les résultats expérimentaux de l'interprétation probabiliste, mais bien davantage l'espoir d'atteindre, grâce aux « modèles » des micro-objets individuels, des problèmes que, précisément, la phénoménologie orthodoxe s'interdit de poser.

« Pour l'école de Copenhague, rappelle J. P. Vigier, la probabilité est un élément irréductible de la théorie qui limite définitivement notre connaissance de la nature... La distribution [des probabilités] sera par nature à jamais inexplicable, inanalysable et inaltérable, quelles que soient les conditions physiques agissant sur les particules [1]. »

Au contraire, attribuer l'établissement des densités de probabilité à des fluctuations conduira peut-être un jour, comme cela a été le cas pour la théorie du mouvement brownien, à l'observation de particules encore hypothétique. « Pour nous, déclare J. P. Vigier, un ensemble de lois [physiques] décrit un niveau, comme par exemple la Mécanique classique ou les lois de Mariotte sur les gaz... L'expérience a montré qu'on ne pouvait étendre le « modèle » classique aux micro-objets individuels qui constituent la matière classique, et qu'il fallait introduire la théorie cinétique si on voulait tenir compte de la structure moléculaire des gaz... Chaque niveau est gouverné par des lois déterministes et subit sous forme de lois stochastiques l'action chaotique de l'ensemble infini des niveaux qui constitue la nature. Tout phénomène physique apparaît

[1] [1]. pp. 124-125.

ainsi comme tissé inextricablement de causalité et de hasard, à la fois synthèse et résultante mobile des mouvements infiniment complexes de la matière dont il s'agit [1]. »

L'interprétation causale, dont la mise en œuvre se heurte encore à de sérieuses difficultés mathématiques, ne pourra s'imposer que si elle parvient à prévoir et à expliquer de nouveaux phénomènes échappant à la mécanique quantique actuelle. Cela ne semble pas exclu dans le domaine de la physique nucléaire, où les régions singulières des ondes peuvent se recouvrir, ce qui peut conduire à mettre en défaut les propriétés statistiques de l'onde ψ. Il devrait être également possible de parvenir à une classification plus précise des particules élémentaires. Enfin, et c'est la voie suivie par J. P. Vigier, on peut espérer établir une solidarité entre la relativité généralisée et la théorie de la double solution.

L'avenir décidera, mais de toute évidence l'attitude motrice est celle qui consiste, plutôt que de camper sur des interdictions dictées par notre connaissance actuelle des choses, à oser forger des modèles dans l'espoir d'atteindre un niveau toujours plus profond de la réalité physique, même si l'on doit un jour, sans rémission possible, se heurter au seuil de l'inconnaissable.

[1] [1], pp. 125-126.

Bibliographie

BOHM (D.)

[1] A suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of « hidden » Variables, I et II, Phys. Rev., 85, 1952, pp. 166-179 et 180-193.

[2] Proof that Probability Density approaches Ψ^2 in Causal Interpretation of the Quantum Theory, Phys. Rev., 89, 1953, pp. 458-466.

BOLTZMANN (L.)

[1] Vorlesungen über die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Lichtes, 2 vol., J. A. Barth, éd., Leipzig, 1891-1893.

[2] Vorlesungen über Gastheorie, 2 vol., J. A. Barth, éd., Leipzig, 1895-1898. (Trad. française par A. Galotti avec introduction et notes de M. Brillouin, 2 vol., Gauthier Villars, éd., Paris, 1902-1905.)

[3] Vorlesungen über die Principe der Mechanik, 2 vol., J. A. Barth, éd., Leipzig, 1897-1904.

[4] Über die Methoden der theoretischen Physik, Munich, 1892 (*Populäre Schriften* [P. S.], J. A. Barth, éd., Leipzig, 1905, pp. 1-10).

[5] Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, Vienne, 1886 (P. S., pp. 28-50).

[6] Gustav Robert Kirchhoff, Graz, 15 nov. 1887 (P. S., pp. 51-75).

[7] Über die Bedeutung von Theorien, Graz, 16 juillet 1890 (P. S., pp. 76-80).

[8] Joseph Stefan, Vienne, 8 déc. 1895 (P. S., pp. 92-103).

[9] Ein Wort der Mathematik an die Energetik, Wiedemann Ann., 57, 1896, p. 39 (P. S., pp. 104-136).

[10] Zur Energetik, Wiedemann Ann., 58, 1896, p. 595 (P. S., pp. 137-140).

[11] Über die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft, Wiedemann Ann., 60, 1897, p. 231 (P. S., pp. 141-157).

[12] Nochmals über die Atomistik, Wiedemann Ann., 61, 1897, p. 790 (P. S., pp. 158-161).

[13] Über die Frage nach der objektiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur, Wiener Berichte, 106, 1897, p. 83 (P. S., pp. 162-187).

[14] Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit, Munich, 22 sept. 1899 (P. S., pp. 198-227).

[15] Zur Erinnerung an Joseph Loschmidt, Vienne, 29 oct. 1895 (P. S., pp. 228-252).

[16] Über die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik, Clark University, 1899 (P. S., pp. 253-307).

[17] Über die Prinzipien der Mechanik, I, Leipzig, nov. 1900; II, Vienne, oct. 1902 (P. S., pp. 308-337).

[18] Ein Antrittsvortrag zur Naturphilosophie, Vienne, 26 oct. 1903 (P. S., pp. 338-344).

[19] Über statistische Mechanik, Saint-Louis, 1904 (P. S., pp. 345-363).

[20] Entgegnung auf einen von Prof. Ostwald über das Glück gehaltenen Vortrag, Vienne, 1904 (P. S., pp. 364-378).

[21] Über eine These Schopenhauers, Vienne, 21 janvier 1905 (P. S., pp. 385-402).
Les mémoires scientifiques de Boltzmann ont été réunis, par Fritz Hasenöhrl, en trois volumes : *Wissenschaftliche Abhandlungen* (W. A., I, II, III), J. A. Barth, éd., Leipzig, 1909.

[22] Über die mechanische Bedeutung der zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, Wiener Berichte, 53, 1866, pp. 195-220 (W. A., I, pp. 9-33).

[23] Zur Priorität der Auffindung der Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und dem Prinzip der kleinsten Wirkung, Poggendorf Ann. 143, 1871, pp. 211-230 (W. A., I, pp. 228-236).

[24] Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen, Wiener Berichte, 63, 1871, pp. 397-418 (W. A., I, pp. 237-258).

[25] Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht, Wiener Berichte, 63, 1871, pp. 679-711 (W. A., I, pp. 259-287).

[26] Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft, Wiener Berichte, 63, 1871, pp. 712-732 (W. A., I, pp. 288-308).

[27] Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen, Wiener Berichte, 66, 1872, pp. 275-370 (W. A., I, pp. 316-402).

[28] Über das Wärmegleichgewicht von Gasen, auf welche äussere Kräfte wirken, Wiener Berichte, 72, 1875, pp. 427-457 (W. A., II, pp. 1-30).

[29] Über die Aufstellung und Integration der Gleichungen, welche die Molekularbewegung in Gasen bestimmen, Wiener Berichte, 74, 1876, pp. 503-552.

[30] Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie, Wiener Berichte, 75, 1877, pp. 62-100 (W. A., II, pp. 112-148).

[31] Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht, Wiener Berichte, 76, 1877, pp. 373-435 (W. A., II, pp. 164-223).

[32] Weitere Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie, Wiener Berichte, 78, 1878, pp. 7-46 (W. A., II, pp. 250-288).

[33] Über einige das Wärmegleichgewicht betreffende Sätze, Wiener Berichte, 84, 1881, pp. 136-145 (W. A., II, pp. 572-581).

[34] Ableitung des Stefanschen Gesetzes betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der elektromagnetischen Lichttheorie, Wiedemann Ann., 22, 1884, pp. 291-294 (W. A., III, pp. 118-121).

[35] Der aus den Sätzen über Wärmegleichgewicht folgende Beweis des Prinzips des letzten Multiplikators in seiner einfachsten Form, Math. Annalen, 42, 1893, pp. 374-376 (W. A., III, pp. 497-499).

[36] On certain Questions of the Theory of Gases, Nature, 51, 1895, pp. 413-415 (W. A., III, pp. 535-544).

[37] Erwiderung an Culverwell, Nature, 51, 1895, p. 581 (W. A., III, p. 545).

[38] Sur la théorie des gaz. Lettres à M. Bertrand, I et II, Comptes rendus de l'Acad. Sci., 122, 1896, pp. 1173 et 1314 (W. A., III, pp. 564-565 et 566-567).

[39] Entgegnung auf die wärmetheoretischen Betrachtungen des Hrn. E. Zermelo, Wiedemann Ann., 57, 1896, pp. 773-784 (W. A., III, pp. 567-578).

[40] Zu Hrn. Zermelos Abhandlung « Über die mechanische Erklärung irreversibler Vorgänge », Wiedemann Ann., 60, 1897, pp. 392-398 (W. A., III, pp. 579-586).

[41] Über einen mechanischen Satz Poincarés, Wiener Berichte, 106, 1897, pp. 12-20 (W. A., III, pp. 587-595).

[42] Über irreversible Strahlungsvorgänge, I, Berliner Berichte, 1897, pp. 660-662 (W. A., III, pp. 615-617).

[43] Über irreversible Strahlungsvorgänge, II, Berliner Berichte, 1897, pp. 1016-1018 (W. A., III, pp. 618-621).

[44] Über die sogenannte H-Curve, Math. Annalen, 50, 1898, pp. 325-332.

[45] Kinetische Theorie der Materie (en collaboration avec J. Nabl) in Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, vol. V, § 8, pp. 494-557.

BOREL (E.)

[1] Leçons sur la théorie des fonctions, Gauthier Villars, éd., Paris, 1914.

[2] Mécanique statistique classique, Gauthier Villars, éd., Paris, 1925.

BRODA (E.)

[1] Ludwig Boltzmann, Mensch, Physiker, Philosoph, Franz Deuticke, Vienne, 1955.

BROGLIE (Louis DE)

[1] La Physique nouvelle et les Quanta (Bibliothèque de Philosophie Scientifique, dirigée par Paul Gaultier), Flammarion, éd., Paris, 1937.

[2] Matière et Lumière (Collection Sciences d'aujourd'hui dirigée par André George), Albin Michel, éd., Paris, 1937.

[3] Continu et Discontinu en Physique moderne (Collection Sciences d'aujourd'hui), Albin Michel, éd., Paris, 1941.

[4] Physique et Microphysique (Collection Sciences d'aujourd'hui), Albin Michel, éd., Paris, 1947.

[5] Eléments de la théorie des Quanta et de la Mécanique ondulatoire, Gauthier Villars, éd., Paris, 1953.

[6] La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ? Gauthier Villars, éd., Paris, 1953.

[7] Nouvelles Perspectives en Microphysique (Collection Sciences d'aujourd'hui), Albin Michel, éd., Paris, 1956.

[8] Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire (La théorie de la double solution), Gauthier Villars, éd., Paris, 1956.
Pour une bibliographie générale jusqu'en 1952, consulter l'ouvrage :

[9] Louis de Broglie, Physicien et Penseur (Collection les Savants et le Monde, dirigée par André George), Albin Michel, éd., Paris, 1953.

BURBURY (S. H.)

[1] A treatise on the kinetie Theory of Gases, Cambridge U. P., 1899.

[2] Equilibrium of Temperature in a Vertical Column of Gas, Nature, 12, 1875, p. 107.

[3] On the law of distribution of energy, Phil. Mag., 37, 1894, pp. 143-158.

[4] The second law of thermodynamics, Phil. Mag., 37, 1894, pp. 574-578.

[5] Controverse avec H. Bryan, L. Boltzmann, E. P. Culverwell, G. F. Fitzgerald, A. Schuster, H. W. Watson ; dans Nature, 51, 1894-1895, voir en particulier :
— Boltzmann's Minimum Functions, pp. 78 et 320.
— The ratio of the Specific Heats of Gases, p. 127.
— The kinetic theory of Gases, p. 175.
et dans Nature, 52, 1895, voir aussi :
— Boltzmann's Minimum Function, p. 104.
— The kinetic theory of Gases, p. 316.

[6] On certain supposed irreversible process, Phil. Mag., 49, 1900, pp. 475-486.

[7] On the variation of entropy as treated in W. Gibb's statistical mechanics, Phil. Mag., 6, 1903, pp. 251 et qq.

[8] On Jeans theory of gases, Phil. Mag., 6, 1903, p. 529.

[9] Theory of diminution of entropy, Phil. Mag., 8, 1904, pp. 43-49.

CLAUSIUS (R.)

[1] Théorie mécanique de la chaleur (trad. française par F. Folie), Eugène Lacroix, éd., Paris ; 1re partie, 1868 ; 2e partie, 1869.

[2] Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen, Poggendorf Ann., 79, 1850, pp. 368-397 et pp. 500-524.

[3] Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, Poggendorf Ann., 93, 1854, pp. 481-506.

[4] Über die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Dampfmaschine, Poggendorf Ann., 97, 1856, pp. 441-476.

[5] Über die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen, Poggendorf Ann., 100, 1857, pp. 353-380.

[6] Über die mittlere Länge der Wege, welche bei der Molekularbewegung gasförmiger Körper von den einzelnen Molekülen zurückgelegt werden; nebst einigen anderen Bemerkungen über die mechanische Wärmetheorie; Poggendorf Ann., 105, 1858, pp. 239-258.

[7] Über die Wärmeleitung gasförmiger Körper, Poggendorf Ann., 115, 1862, pp. 1-56.

[8] Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie, Poggendorf Ann., 125, 1866, pp. 353-400.

[9] Über einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz, Poggendorf Ann., 141, 1870, pp. 124-130.

[10] Über die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien, Poggendorf Ann., 142, 1871, pp. 433-461.

[11] Zur Geschichte der mechanischen Wärmetheorie, Poggendorf Ann., 145, 1872, pp. 132-146.

CULVERWELL (E. P.)

[1] Dr. Watson's Proof of Boltzmann's Theorem on Permanence of Distributions, Nature, 50, 1894, p. 617.

[2] Controverse avec S. H. Burbury, L. Boltzmann, etc. (cf. Burbury), Nature, 51, 1894-1895; voir en particulier:
— The kinetic theory of gases, p. 78.
— Prof. Boltzmann's Letter on the Kinetic Theory of Gases, p. 581.
— Boltzmann's Minimum Theorem, p. 105 et p. 246.
et dans Nature, 52, 1895:
— Boltzmann's Minimum Theorem, p. 149.

DIRAC (P. A. M.)

[1] Les Principes de la Mécanique Quantique (trad. française par A. Proca et J. Ullmo), Presses Universitaires de France, éd., Paris, 1931.

DUGAS (R.)

[1] Histoire de la Mécanique, Le Griffon, éd., Neuchâtel, et Dunod, éd., Paris, 1950.

[2] La Mécanique au XVIIe siècle, Le Griffon, éd., Neuchâtel, et Dunod, éd., Paris, 1954.

DUHEM (P.)

[1] L'évolution de la mécanique, Joanin, éd., Paris, 1903.

[2] Traité d'énergétique ou de Thermodynamique générale, Gauthier Villars, éd., Paris, 1911.

[3] La Théorie Physique, son objet, sa structure, Marcel Rivière, éd. (2e édition), Paris, 1914.

EHRENFEST (P. et T.)

[1] Begriffliche Grundlagen der Statistischen Auffassung in der Mechanik, Encyklopädie der math. Wissenschaften, IV, Pt. 32, Leipzig-Berlin, 1911.

EINSTEIN (A.)

[1] Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichtes und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, Ann. der Physik, 9, 1902, pp. 417-433.

[2] Eine Theorie der Grundlagen der Thermodynamik, Ann. der Physik, 11, 1903, pp. 170-187.

[3] Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme, Ann. der Physik, 14, 1904, pp. 354-362.

[4] Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt, Ann. der Physik, 17, 1905, pp. 132-148.

[5] Über die von der molekular kinetische Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, Ann. der Physik, 17, 1905, pp. 549-560.

[6] Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen, Ann. der Physik, 19, 1906, pp. 289-306.

[7] Zur Theorie der Brownschen Bewegung, Ann. der Physik, 19, 1906 pp. 371-381.

[8] Zur Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption, Ann. der Physik, 20, 1906, pp. 199-206.

[9] Theoretische Bemerkungen über die Brownsche Bewegung, Zeits. für Electrochemie, 13, 1907, pp. 41-42.

[10] Elementare Theorie der Brownschen Bewegung, Zeits. für Electrochemie, 14, 1907, pp. 235-239.
Les mémoires d'A. Einstein sur le mouvement brownien ont été réunis en un volume :

[11] Untersuchungen über die Theorie der Brownschen Bewegungen, hrsg. von R. Fürth, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1922.
Il existe une traduction anglaise de cet ouvrage :
Investigations on the Theory of the Brownian Movement, Dover Pub., New York, 1926.

[12] Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme, Ann. der Physik, 22, 1907, pp. 180-190 et p. 800 (Berichtigung).

[13] Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems, Physikal. Zeitschrift, 10, 1909, pp. 185-193.

[14] Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung, Physikal. Zeitschrift, 10, 1909, pp. 817-826.

[15] Bemerkungen zu den P. Hertzschen Arbeit über die mechanischen Grundlagen der Thermodynamik, Ann. der Physik, 34, 1911, pp. 175-176.

[16] Elementare Betrachtungen über die thermische Molekülarbewegung in festen Körpern, Ann. der Physik, 35, 1911, pp. 679-694.

[17] Strahlungemission und -absorption nach der Quantentheorie, Deutsche Physikalische Gesellschaft, Verhandlungen, 18, 1916, pp. 318-323.

[18] Quantentheorie der Strahlung, Physikal. Gesellschaft, Zürich, Mitteilungen, 16, pp. 47-62, et Physikal. Zeitschrift, 18, 1917, pp. 121-128.

[19] Autobiographisches in *Albert Einstein : Philosopher-Scientist*, Tudor, éd., New York, 1949.
Cet ouvrage comporte aussi une bibliographie générale de l'œuvre d'Einstein.

[20] Quantenmechanik und Wirklichkeit, Dialectica, 718, 1948, pp. 320-323.

GIBBS (J. W.)

[1] Elementary Principles in Statistical Mechanics, Yale Univ. Press, New Haven, 1902, trad. française par F. Cosserat, revue et complétée par J. Rossignol, avec une introduction de M. Brillouin, Hermann, éd., Paris, 1926.

[2] The Scientific Papers, 2 vol., Longmans, Green and Co., Londres et New York, 1906.

HADAMARD (J.)

[1] La mécanique statistique, Bulletin of the american Math. Society, XII, 1906, pp. 194-210.

HELM (G.)

[1] Zur Energetik, Wiedemann Ann., 57, 1896, pp. 646-659.

[2] Die Energetik, Verlag von Veit., éd., Leipzig, 1898.

HELMHOLTZ (H. VON)

[1] Mémoire sur la conservation de la force (trad. par L. Pérard), Masson, éd., Paris, 1869.

[2] Wissenschaftliche Abhandlungen, J. A. Barth, éd., Leipzig, 1882.

[3] Vorlesungen über die theoretische Physik, Toss, éd., Hambourg et Leipzig, 1882.

[4] Vorträge und Reden, Vieweg, éd., Brunswick, 1903.

HERTZ (H.)

[1] Über die Beziehungen zwischen Licht und Elektrizität, Strauss, éd., Bonn, 1890.

[2] Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, J. A. Barth, Leipzig, 1892.

[3] Die Prinzipien der Mechanik, J. A. Barth, éd., Leipzig, 1894 ; trad. anglaise : The principles of mechanics, Dover Pub., New York, 1956.

[4] Gesammelte Werke, J. A. Barth, éd., Leipzig, 1894.

HERTZ (P.)

[1] Über die mechanischen Grundlagen der Thermodynamik, Ann. der Physik, 33, 1910, pp. 225-274.

JÄGER (G.)

[1] Ludwig Boltzmann, in Neuen Österreichischen Biographie, Bd. 2, Wien, 1925.

JEANS (J. H.)

[1] Théorie dynamique des gaz (trad. de la 3e édition anglaise par A. Clerc), A. Blanchard, éd., Paris, 1925.

[2] Théorie du rayonnement et des quanta (trad. de la 2e édition anglaise par G. Juvet), A. Blanchard, éd., Paris, 1925.

JOULE (J. P.)

[1] Scientific Papers, I et II, Taylor, éd., Londres, 1887.

KIRCHHOFF (G.)

[1] Über das Ziel der Naturwissenschaften, Heidelberg, 1865.

[2] Gesammelte Abhandlungen, Nachtrag hrsg. von L. Boltzmann, J. A. Barth, éd., Leipzig, 1882.

[3] Vorlesungen über mathematische Physik, 2 vol., Teubner, éd., Leipzig, 1883-1891.

[4] Vorlesungen über theorie der Wärme (publié par M. Planck), Teubner, éd., Leipzig, 1894.

[5] Über die Bewegung der Elektrizität in Leitern, Poggendorf Ann., 102, 1857, pp. 529-544.

LIOUVILLE (J.)

[1] Journal de Mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1836-1846 et 1846-1850.

[2] Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels, Bachelier, éd., Paris, 1850.

LORENTZ (H. A.)

[1] Abhandlungen über theoretische Physik, Teubner, éd., Leipzig, 1907.

[2] Les théories statistiques en Thermodynamique, Teubner, éd., Leipzig, 1916.

[3] Collected Papers, vol. I à IX, Martin Nijhoff, éd., La Haye, 1935-1939.

[4] Eloge de Boltzmann in Collected Papers, vol. IX.

LOSCHMIDT (J.)

Über den Zustand des Wärmegleichgewichtes eines Systems von Körpern mit Rücksicht auf die Schwerkraft ; fait l'objet de quatre mémoires :

[1] Wiener Berichte, 73², 1876, p. 135 et qq.

[2] Wiener Berichte, 73², 1876, p. 366 et qq.

[3] Wiener Berichte, 75², 1877, p. 67 et qq.

[4] Wiener Berichte, 76, 1877 (voir aussi Boltzmann [32]).

MACH (E.)

[1] Die Prinzipien der Wärmelehre, historisch-kritisch entwickelt, J. A. Barth, éd., Leipzig, 1896.

[2] La Mécanique, exposé historique et critique de son développement (trad. par E. Bertrand), Hermann, éd., Paris, 1925.

[3] Die Leitgedanken meiner naturwissenschaftlichen Erkenntnislehre und ihre Aufnahme durch die Zeitgenossen ; Scientia VII, 1910, pp. 225-240.

MAXWELL (J. C.)

[1] Traité d'électricité et de magnétisme (trad. de la 2e édition anglaise par Seligmann-Lui), Gauthier-Villars, éd., Paris, 1889.

[2] La chaleur (trad. de la 8e édition anglaise par G. Mouret), Tignol, éd., Paris, 1891.

[3] On Faraday's Lines of Force, Trans. of Cambridge Phil. Soc., X, part. I, pp. 27-83 ; Scientific Papers (S. P.), Cambridge U. P., 1890, I, pp. 155-229.

[4] On the stability of the motion of Saturn's Rings, S. P., I, pp. 288-376.

[5] Illustrations of the Dynamical Theory of Gases, Phil. Mag., 19, 1860, et S. P., I, pp. 377-409.

[6] On Physical Lines of Force, Phil. Mag., 21, pp. 161-175, 281-291, 338-348, et S. P., I, pp. 451-513.

[7] A dynamical Theory of the Electromagnetic Field, Trans. of Roy. Soc., 155, 1865, pp. 419-512, et S. P., I, pp. 526-597.

[8] The dynamical Theory of Gases, Phil. Mag., 35, 1868, et S. P., II, pp. 26-78.

[9] Elements of Natural Philosophy, S. P., II, pp. 324-328.

[10] An essay of the Mathematical Principles of Physics, S.P., II, pp. 338-342.

[11] On Loschmidt's Experiments on Diffusion in relation to the kinetic Theory of Gases, S. P., II, pp. 343-350.

[12] On the final State of a System of Molecules in motion subject to forces of any kind, S. P., II, pp. 351-354.

[13] On the dynamical evidence of the molecular Constitution of Bodies, S. P., II, pp. 418-438.

[14] On Boltzmann's Theorem on the average Distribution of Energy in a System of material Points, S. P., II, pp. 713-741.

OSTWALD (W.)

[1] L'Energie (trad. par E. Philippi), Alcan, éd., Paris, 1910.

[2] Esquisse d'une Philosophie des Sciences (trad. Dorolle), Alcan, éd., Paris, 1911.

[3] Der Energetische Imperativ, Leipzig Akad. Vers., Leipzig, 1912.

PAULI (W.)

[1] Lettre à Max Born, British Journal for the Philosophy of Science, IV, No 14, 1953.

PLANCK (M.)

[1] Vorlesungen über die Theorie der Warmestrahlung, J. A. Barth, éd., Leipzig, 1906 (2e édition, 1913).

[2] Leçons de Thermodynamique (trad. de la 3e édition allemande par R. Chevassus), Hermann, éd., Paris, 1913.

[3] Einführung in die theoretische Physik, vol. I-V, Hirzel, éd., Leipzig, 1921-1927.

[4] Wege zur physikalischen Erkenntnis, 2 vol., Hirzel, éd., Leipzig, 1943.

[5] Vorträge und Erinnerungen, Hirzel, éd., Stuttgart, 1949.

[6] Absorption und Emission elektrischer Wellen durch Resonanz, Berliner Berichte, 1895, pp. 289-301.

[7] Gegen die neuere Energetik, Wiedemann Ann., 57, 1896, pp. 72-78.

[8] Über elektrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden, Berliner Berichte, 1896, pp. 151-170.

[9] Über irreversible Strahlungsvorgänge fait l'objet de trois mémoires:
I. Berliner Berichte, 1897, pp. 57-68.
II. Berliner Berichte, 1897, pp. 715-717.
III. Berliner Berichte, 1897, pp. 1122-1145.

[10] Über eine Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung, Verh. der Deutsch. Phys. Gesellschaft, vol. 2, 1900, pp. 202-204.

[11] Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung in Normalspectrum, Verh. der Deutsch. Phys. Gesellschaft, vol. 2, 1900, pp. 237-245.

[12] Über das Gesetz der Energieverteilung in Normalspectrum, Ann. der Physik, 4, 1901, pp. 553-563.

[13] Über die Elementarquanta der Materie und der Elektrizität, Ann. der Physik, 4, 1901, pp. 564-566.

[14] Über die Verteilung der Energie zwischen Äther und Materie, Ann. der Physik, 9, 1902, pp. 629-641.

[15] Über die mechanische Bedeutung der Temperatur und der Entropie, Festschrift Ludwig Boltzmann, J. A. Barth, éd., Leipzig, 1904, pp. 113-122.

[16] Die Einheit des physikalischen Weltbildes (Leyde, 1908), Phys. Zeitschrift, 10, 1909, pp. 62-75 (trad. française in *Initiations à la Physique* [I. P.], Flammarion, éd., 1941, pp. 7-38).

[17] Zur Theorie der Wärmestrahlung, Ann. der Physik, 31, 1910, pp. 758-768.

[18] Zur Mach's Theorie der physikalischen Erkenntnis. Eine Erwiderung, Phys. Zeitschrift, 11, 1910, pp. 1186-1190.

[19] Die Entstehung und bisherige Entwicklung der Quantentheorie, Nobel-Vortrag, Stockholm, 1920 (trad. française in I. P., pp. 68-83).

[20] Physikalische Gesetzlichkeit im Lichte neuerer Forschung, Naturwissenschaften, 14, 1925, pp. 249-261 (trad. française in I. P., pp. 144-172).

[21] Die Kausalität im Naturgeschehen, Scientia, 53, 1933, pp. 154-164 (trad. française in I. P., pp. 226-252).

[22] Ursprung und Auswirkung wissenschaftlicher Ideen, Berlin, 1933 (trad. française in I. P., pp. 253-273).

POINCARÉ (H.)

[1] Electricité et optique, I. Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière, G. Carré, éd., Paris, 1890; II. Les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz, G. Carré, éd., Paris, 1891.

[2] Electricité et optique. La lumière et les théories électrodynamiques G. Carré et C. Naud, éd., Paris, 1901.

[3] La Science et l'hypothèse, Flammarion, éd., Paris, 1906.

[4] Science et Méthode, Flammarion, éd., Paris, 1908.

[5] Thermodynamique (2e édition), Gauthier-Villars, éd., Paris, 1908.

[6] Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, Hermann, éd., Paris, 1911.

[7] La valeur de la Science, Flammarion, éd., Paris, 1913.

[8] Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, Acta Math., 13, 1890, p. 67.

[9] Sur une objection à la théorie cinétique des gaz, C. R. de l'Acad. sci., 116, 1893, pp. 1017-1021.

[10] Sur la théorie cinétique des gaz, C. R. de l'Acad. des sci., 116, 1893, pp. 1165-1166.

[11] Allocution de la séance publique annuelle du 17 décembre 1906, C. R. de l'Acad. des sci., 1906, p. 997.

[12] Réflexions sur la théorie cinétique des gaz, J. Phys., 4e série, 5, 1906, pp. 369-403, et Œuvres complètes, t. IX, 1954, pp. 587-619.

[13] Sur la théorie des Quanta, J. Phys., 5e série, t. 2, 1912, pp. 5-34.

On trouvera une bibliographie complète des œuvres de Poincaré dans le livre de E. Lebon, *Henri Poincaré*, biographie, bibliographie analytique des écrits, Gauthier-Villars, éd., Paris, 1912. Voir aussi les *Œuvres complètes*, éditées chez Gauthier-Villars de 1928 à 1956 (vol. I à XI).

RANKINE (M.)

[1] Miscellaneous Scientific Papers, Griffin, éd., Londres, 1881.

Lord SALISBURY

[1] Inaugural Address at the British Association, 8 août 1894, Nature, 50, 1894, pp. 339-343.

SCHRÖDINGER (E.)

[1] Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, Naturwissenschaften, 23, 1935, I, p. 807 ; II, p. 823, et III, p. 844.

SOLVAY (Ve Conseil)

[1] Electrons et Photons (Rapports au Ve Conseil de Physique Solvay), Gauthier-Villars, éd., Paris, 1928.

STREINTZ (F.)

[1] Die Physikalischen Grundlagen der Mechanik, Teubner, éd., Leipzig, 1883.

THOMSON (Sir W. ou Lord KELVIN)

[1] Mathematical and Physical Papers, Cambridge U. P., éd., Cambridge, 1882.

[2] Constitution de la matière (trad. Lugol), préface de M. Brillouin, Gauthier-Villars, éd., Paris, 1893.

THOMSON (W.) et TAIT (P. G.)

[1] Treatise on Natural Philosophy, 2 vol., Cambridge U. P., éd., Cambridge, 1879-1883.

VIGIER (J. P.)

[1] Structure des micro-objets dans l'interprétation causale de la théorie des quanta, Gauthier-Villars, éd., Paris, 1956.

ZERMELO (E.)

[1] Über einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie, Wiedemann Ann., 57, 1896, pp. 485-494.

[2] Über mechanische Erklärungen irreversibler Vorgänge. Eine Antwort auf Hrn. Boltzmanns « Entgegnung », Wiedemann Ann., 59, 1896, pp. 793-801.

Table des matières

Pages

PRÉFACE, par Louis de Broglie 7
INTRODUCTION 17

PREMIÈRE PARTIE

La théorie physique au sens de Bolzmann

CHAPITRE PREMIER. — Boltzmann et la mathématique : infini, continu et équations différentielles de la physique 25
CHAPITRE II. — Discussion des principes de la mécanique 30
CHAPITRE III. — Exposé des principes de la mécanique 61
CHAPITRE IV. — Sur le mécanisme et le rôle de la mécanique en physique théorique 68
CHAPITRE V. — Sur les méthodes de la physique théorique. 76
CHAPITRE VI. — Bref rappel des thèses de l'énergétique 82
CHAPITRE VII. — Boltzmann devant l'énergétique 91
CHAPITRE VIII. — Nécessité de l'atomistique 101
CHAPITRE IX. — Retour aux méthodes de la physique théorique . . 110
CHAPITRE X. — Boltzmann et la mécanique statistique 119
CHAPITRE XI. — Objet et nature des théories physiques 122
CHAPITRE XII. — Boltzmann et la philosophie 126
CHAPITRE XIII. — Sur la carrière de Boltzmann 134

SECONDE PARTIE

Méthode et dialectique de Boltzmann

AVANT-PROPOS 143
CHAPITRE PREMIER. — De la loi de répartition des vitesses de Maxwell au théorème H de Boltzmann 145
CHAPITRE II. — Extension du théorème de Liouville à un système différentiel plus général que les équations canoniques de la dynamique. 151

Pages

CHAPITRE III. — Première formulation, dans le cadre de la théorie cinétique, du second principe de la thermodynamique 153
CHAPITRE IV. — Les objections de Loschmidt 158
CHAPITRE V. — Du paradoxe de réversibilité vers l'interprétation probabiliste du second principe 185
CHAPITRE VI. — Interprétation probabiliste du second principe de la thermodynamique 192
CHAPITRE VII. — Sur la courbe H 200
CHAPITRE VIII. — L'objection Zermelo 206

TROISIÈME PARTIE

Prolongements modernes

CHAPITRE PREMIER. — La mécanique statistique au sens de Gibbs . 223
CHAPITRE II. — Poincaré devant l'interprétation mécanique de l'irréversibilité. Entropie grossière et entropie fine 234
CHAPITRE III. — Jugement de Planck sur l'entropie au sens de Boltzmann et l'entropie au sens de Gibbs 239
CHAPITRE IV. — Rôle de l'entropie au sens de Boltzmann dans la genèse de la théorie des quanta de Planck 245
CHAPITRE V. — Planck et l'énergétique 253
CHAPITRE VI. — Planck et Mach. Quelques mots sur la théorie physique au sens de Planck 256
CHAPITRE VII. — Einstein et la mécanique statistique 260
CHAPITRE VIII. — Mouvement brownien 270
CHAPITRE IX. — De la formule de Planck à la dualité onde-corpuscule en théorie de la lumière 279
CHAPITRE X. — Sur un débat moderne : interprétation soit probabiliste, soit causale de la mécanique quantique 282
BIBLIOGRAPHIE 295

IMPRIMÉ EN SUISSE

CET OUVRAGE, LE TRENTE-TROISIÈME
DE LA « BIBLIOTHÈQUE SCIENTIFIQUE »
A ÉTÉ ACHEVÉ D'IMPRIMER SUR LES PRESSES
DE L'IMPRIMERIE CENTRALE S. A., A NEUCHATEL,
POUR LE COMPTE DES ÉDITIONS DU GRIFFON, A NEUCHATEL,
EN MIL NEUF CENT CINQUANTE-NEUF